



**UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA  
GESTIÓN DE BIBLIOTECAS**



**CARTA DE AUTORIZACIÓN**

**CÓDIGO**

**AP-BIB-FO-06**

**VERSIÓN**

**1**

**VIGENCIA**

**2014**

**PÁGINA**

**1 de 1**

Neiva, 13 de septiembre de 2022

Señores

CENTRO DE INFORMACIÓN Y DOCUMENTACIÓN

UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA

Neiva

El (Los) suscrito(s):

Katherine Reyes Espinosa, con C.C. No 1075307860.

Autor(es) de la tesis y/o trabajo de grado titulado UTILIZACIÓN DE TÉCNICAS DE MODELAMIENTO E IDENTIFICACIÓN APLICADAS AL SISTEMA KIT SEGWAY EDUMIP, presentado y aprobado en el año 2022 como requisito para optar al título de INGENIERO ELECTRÓNICO;

Autorizo (amos) al CENTRO DE INFORMACIÓN Y DOCUMENTACIÓN de la Universidad Surcolombiana para que, con fines académicos, muestre al país y el exterior la producción intelectual de la Universidad Surcolombiana, a través de la visibilidad de su contenido de la siguiente manera:

- Los usuarios puedan consultar el contenido de este trabajo de grado en los sitios web que administra la Universidad, en bases de datos, repositorio digital, catálogos y en otros sitios web, redes y sistemas de información nacionales e internacionales "open access" y en las redes de información con las cuales tenga convenio la Institución.
- Permita la consulta, la reproducción y préstamo a los usuarios interesados en el contenido de este trabajo, para todos los usos que tengan finalidad académica, ya sea en formato Cd-Rom o digital desde internet, intranet, etc., y en general para cualquier formato conocido o por conocer, dentro de los términos establecidos en la Ley 23 de 1982, Ley 44 de 1993, Decisión Andina 351 de 1993, Decreto 460 de 1995 y demás normas generales sobre la materia.
- Continúo conservando los correspondientes derechos sin modificación o restricción alguna; puesto que, de acuerdo con la legislación colombiana aplicable, el presente es un acuerdo jurídico que en ningún caso conlleva la enajenación del derecho de autor y sus conexos.

De conformidad con lo establecido en el artículo 30 de la Ley 23 de 1982 y el artículo 11 de la Decisión Andina 351 de 1993, "Los derechos morales sobre el trabajo son propiedad de los autores", los cuales son irrenunciables, imprescriptibles, inembargables e inalienables.






EL AUTOR/ESTUDIANTE:

Katherine Reyes Espinosa

Firma: \_\_\_\_\_

Vigilada Mineducación

La versión vigente y controlada de este documento, solo podrá ser consultada a través del sitio web Institucional [www.usco.edu.co](http://www.usco.edu.co), link Sistema Gestión de Calidad. La copia o impresión diferente a la publicada, será considerada como documento no controlado y su uso indebido no es de responsabilidad de la Universidad Surcolombiana.

	<b>UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA</b> <b>GESTIÓN DE BIBLIOTECAS</b>				   	
	<b>DESCRIPCIÓN DE LA TESIS Y/O TRABAJOS DE GRADO</b>					
<b>CÓDIGO</b>	<b>AP-BIB-FO-07</b>	<b>VERSIÓN</b>	<b>1</b>	<b>VIGENCIA</b>	<b>2014</b>	<b>PÁGINA</b> <b>1 de 3</b>

**TÍTULO COMPLETO DEL TRABAJO:** UTILIZACIÓN DE TÉCNICAS DE MODELAMIENTO E IDENTIFICACIÓN APLICADAS AL SISTEMA KIT SEGWAY EDUMIP.

**AUTOR O AUTORES:**

Primero y Segundo Apellido	Primero y Segundo Nombre
REYES ESPINOSA	KATHERINE

**DIRECTOR Y CODIRECTOR TESIS:**

Primero y Segundo Apellido	Primero y Segundo Nombre
SENDOYA LOSADA	DIEGO FERNANDO
MERA PAJOY	MARCOS FIDEL

**ASESOR (ES):**

Primero y Segundo Apellido	Primero y Segundo Nombre

**PARA OPTAR AL TÍTULO DE:** Ingeniero Electrónico

**FACULTAD:** Ingeniería

**PROGRAMA O POSGRADO:** Ingeniería Electrónica

**CIUDAD:** Neiva

**AÑO DE PRESENTACIÓN:** 2022






**NÚMERO DE PÁGINAS:** 68

**TIPO DE ILUSTRACIONES** (Marcar con una X):

Diagramas X Fotografías X Grabaciones en discos\_\_\_ Ilustraciones en general X Grabados\_\_\_ Láminas\_\_\_  
 Litografías\_\_\_ Mapas\_\_\_ Música impresa\_\_\_ Planos\_\_\_ Retratos\_\_\_ Sin ilustraciones\_\_\_ Tablas o Cuadros X

Vigilada Mineducación

La versión vigente y controlada de este documento, solo podrá ser consultada a través del sitio web Institucional [www.usco.edu.co](http://www.usco.edu.co), link Sistema Gestión de Calidad. La copia o impresión diferente a la publicada, será considerada como documento no controlado y su uso indebido no es de responsabilidad de la Universidad Surcolombiana.

	<b>UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA</b> <b>GESTIÓN DE BIBLIOTECAS</b>					   	
	<b>DESCRIPCIÓN DE LA TESIS Y/O TRABAJOS DE GRADO</b>					<small>ISO 9001</small> <small>ISO 14001</small> <small>ISO 45001</small> <small>IGNET</small>	
<b>CÓDIGO</b>	<b>AP-BIB-FO-07</b>	<b>VERSIÓN</b>	<b>1</b>	<b>VIGENCIA</b>	<b>2014</b>	<b>PÁGINA</b>	<b>2 de 3</b>

**SOFTWARE** requerido y/o especializado para la lectura del documento:

**MATERIAL ANEXO:**

**PREMIO O DISTINCIÓN** *(En caso de ser LAUREADAS o Meritoria):*

**PALABRAS CLAVES EN ESPAÑOL E INGLÉS:**

<u>Español</u>	<u>Inglés</u>	<u>Español</u>	<u>Inglés</u>
1. Algoritmos	Algorithms	6. segway	segway
2. Identificación	ID	7. Sistema embebido	embedded system
3. Kit Edumip	Kit Edumip		
4. MATLAB	MATLAB		
5. modelamiento	Modeling		

**RESUMEN DEL CONTENIDO:** (Máximo 250 palabras)

Este proyecto trata de abordar temas de modelado con fines educativos indispensables para acercar al estudiante a modelos complejos de sistemas que existen en el mundo físico, como en este caso es el segway. El desarrollo de este proyecto de grado se fundamenta en el uso del kit educacional Edumip, este dispositivo es un prototipo de un segway a pequeña escala. Este equipo tiene un gran potencial para desarrollar diferentes aplicaciones, se planteó estudiar de forma detallada el funcionamiento y corregir errores a nivel de software para garantizar un funcionamiento que no afectara la obtención del modelo, posterior a culminar la configuración, se abordó el estudio del modelo, el cual en principio es desconocido para esto se procede a obtener las variables necesarias por medio de experimentos, para así realizar una buena identificación por medio de un software, al mismo tiempo por medio de cálculos matemáticos se obtiene un modelo aproximado al comportamiento del sistema. Todos los experimentos que se han realizado fueron documentados, por ende, queda libre para quien quiera aplicarle algún método de control. El fin del proyecto es encontrar y analizar el modelo del kit educativo Edumip para su posterior estudio y comprensión logrando ser destinado como una herramienta complementaria a la teoría de modelamiento. Los estudiantes del programa de Ingeniería Electrónica podrán contrastar con un dispositivo real identificando sus diferentes componentes y aplicando las herramientas de cálculos y programación obtenida en los diferentes cursos de control.

**ABSTRACT:** (Máximo 250 palabras)

Vigilada Mineducación

La versión vigente y controlada de este documento, solo podrá ser consultada a través del sitio web Institucional [www.usco.edu.co](http://www.usco.edu.co), link Sistema Gestión de Calidad. La copia o impresión diferente a la publicada, será considerada como documento no controlado y su uso indebido no es de responsabilidad de la Universidad Surcolombiana.



This project tries to address modeling issues for educational purposes that are essential to bring the student closer to complex models of systems that exist in the physical world, such as the segway in this case. The development of this degree project is based on the use of the Edumip educational kit, this device is a prototype of a small-scale segway. This team has great potential to develop different applications, it was proposed to study in detail the operation and correct errors at the software level to guarantee an operation that did not affect the obtaining of the model, after completing the configuration, the study of the model was addressed That in principle is unknown, the next step is to obtain the necessary variables through experiments in order to carry out a good identification with appropriate software, at the same time by means of mathematical calculations an approximate model of the behavior of the system is obtained. All the experiments that have been carried out were documented, therefore, it is free for anyone who wants to apply a control method. The purpose of the project is to analyze and establish the model of the Edumip educational kit for its subsequent study and understanding, managing to be used as a complementary tool to modeling theory. Students of the Electronic Engineering program will be able to contrast with a real device by identifying its different components and applying the calculation and programming tools obtained in the different control courses.

## APROBACION DE LA TESIS

Nombre Jurado: José de Jesús Salgado Patrón

Firma:

Signer ID: 8FSYCTWZJ8...

Nombre Jurado: Fernand Diaz Franco

Firma:

Digitally signed by Fernand Diaz Franco  
DN: cn=Fernand Diaz Franco, c=CO, o=Universidad Surcolombiana,  
email=fernand.diaz@usco.edu.co  
Reason: I agree to the specified portions of this document  
Location: Neiva, Huila  
Date: 2022.09.14 17:25:15 -05'00'

UTILIZACIÓN DE TÉCNICAS DE MODELAMIENTO E IDENTIFICACIÓN  
APLICADAS AL SISTEMA KIT SEGWAY EDUMIP

KATHERINE REYES ESPINOSA

UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA  
FACULTAD DE INGENIERÍA  
PROGRAMA DE INGENIERÍA ELECTRÓNICA  
NEIVA  
2022

UTILIZACIÓN DE TÉCNICAS DE MODELAMIENTO E IDENTIFICACIÓN  
APLICADAS AL SISTEMA KIT SEGWAY EDUMIP

KATHERINE REYES ESPINOSA

Trabajo de grado presentado como requisito para optar al Título  
de Ingeniero Electrónico.

Director

ING. DIEGO FERNANDO SENDOYA

Codirector

ING. MARCOS FIDEL MERA PAJOY

UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA  
FACULTAD DE INGENIERÍA  
PROGRAMA DE INGENIERÍA ELECTRÓNICA  
NEIVA  
2022

Nota de Aceptación

---

---

---

---

Firma del director

---

Firma del jurado

---

Firma del jurado

Ciudad y Fecha (día, mes, año) (Fecha de entrega)

Dedico con todo mi corazón esta tesis a mis padres porque desde mis 3 años que empecé a estudiar he tenido su apoyo y han sido mis mejores maestros, cada logro en mi vida les pertenece, igual que este, gracias, Juan Carlos Reyes, Maryury Espinosa.



## AGRADECIMIENTOS

Principalmente a Dios por fortalecerme y guiarme en la vida. A mis padres, mi hermano y mis abuelos quienes me han brindado su apoyo y sus consejos, siendo ellos parte importante para poder culminar este proceso. A mi flaco, mi tío José Rolando Espinosa, aunque no este físicamente con nosotros desde donde esta sé que me cuida y me guía. A mi novio Ricardo Roa por sus palabras y apoyo incondicional en cada meta de mi vida. A mi amigo Marcos Mera por su comprensión, dedicación y empeño en la realización de este proyecto. Al ingeniero Diego Sendoya por el tiempo y la asesoría que me brindó en todo momento. A todos los profesores que hicieron parte de mi formación profesional en la universidad. A todos quienes me han acompañado de una u otra forma para alcanzar este importante logro.

## CONTENIDO

Pág.

1.OBJETIVOS.....	15
1.1 OBJETIVO GENERAL.....	15
1.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS .....	15
2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.....	16
2.1 DEFINICIÓN DEL PROBLEMA .....	16
2.2 JUSTIFICACIÓN.....	18
3. FUNDAMENTOS BÁSICOS.....	20
4.CÁLCULOS Y ESTIMACIÓN DEL MODELO.....	26
5. RESULTADOS Y DISCUSIONES.....	36
5.1 EXPERIMENTO DE VELOCIDAD ANGULAR DE LAS RUEDAS .....	36
5.2 EXPERIMENTO DEL MOVIMIENTO DEL CUERPO.....	39
5.3 VALIDACIÓN DEL MODELO.....	44
6.CONCLUSIONES .....	46
7.RECOMENDACIONES .....	47
ANEXO .....	49
ANEXO A. ACTIVACIÓN DEL EDUMIP.....	49
BIBLIOGRAFÍA.....	67

## LISTA DE TABLAS

	Pág
1. Parámetros de las llantas.	27
2. Parámetros del sistema.	30
3. Parámetros del motor.	32
4. Equivalentes para simplificar.	33

## LISTA DE GRÁFICAS

	Pág
Gráfico 1. Señal de Entrada experimento de las ruedas	37
Gráfico 2. Señal de Entrada en función del tiempo.	38
Gráfico 3. Señal de entrada para el experimento del cuerpo.	40
Gráfico 4. Señal de Salida para el experimento del cuerpo	41
Gráfico 5. Respuesta en Frecuencia del movimiento de las ruedas y el cuerpo.	43
Gráfico 6. Croquis del lugar geométrico de las raíces (LGR).	44
Gráfico 7. Respuesta ante un escalón de la (TFS) y (TFI).	45
Gráfico 8. Respuesta del IMU vs tiempo.	65

## LISTA DE FIGURAS

	Pág
1. Robot Edumip	20
2. Tarjeta BeagleBone	21
3. SENSOR MPU-9250	22
4. Encoder	23
5. Plano de la Rueda	26
6. Plano del Edumip	28
7. Posición del robot, experimento de las ruedas.	36
8. Posición del robot, experimento del cuerpo.	39
9. Captura de Pantalla de la página start.htm	49
10. Diagrama de Conexiones del Kit	50
11. Alertas del enlace del Diagrama de Conexiones.	51
12. Menú de opciones de Software para la conexión con el Kit Edumip	51
13. Entorno CCloud9 para conexiones LAN	52
14. Comprobación Librería "librobotcontrol"	53
15. Manejo de Error	54
16. Prueba de drivers Kit Edumip	55
17. Librería de Simulink diseñada para la Tarjeta BeagleBone Blue	59
18. Librería para el Kit Edumip	59
19. Librería de Simulink para el kit Edumip	60
20. Bloque de actuadores	61
21. Ejes de Referencia	61

22. Sensor de medición IMU 9250	62
23. Filtro complementario	62
24. Sistema de rotaciones angulares	63
25. Bloque de la composición del filtro complementario	64
26. Bloque del IMU para obtener theta	64
27. Bloque del sistema de encoders.	65

## LISTA DE ANEXOS

	Pág
Anexo A. Activación del Edumip	89

## GLOSARIO

**ENCODER:** Un encoder es un dispositivo de detección que proporciona una respuesta.

**GNU/LINUX:** Denominación técnica y generalizada que reciben una serie de sistemas operativos de tipo Unix, que también suelen ser de código abierto, multiplataforma, multiusuario y multitarea.

**IMU:** Unidad de medición inercial.

**LAGRANGE:** Llamada así en honor de Joseph Luois Lagrange, es un método por el cual ajusta una ecuación dependiendo de la necesidad ya sea maximizándola o minimizándola.

**LTE:** Es un estándar para comunicaciones inalámbricas de transmisión de datos de alta velocidad para teléfonos móviles y terminales de datos.

**MIP:** Péndulo Invertido Móvil.

**SISTEMA EMBEBIDO:** Herramienta de computación utilizada para ejecutar una o varias funciones.

**SEGWAY:** Dispositivo de transporte con auto balanceo.

**SOLVER:** Es una pieza de software matemático, en forma de programa de computadora independiente o como una biblioteca de software, que es de apoyo para resolver un problema matemático.

**TOOLBOX:** es un entorno de desarrollo que permite introducir la programación de ordenadores en asignaturas sin competencias informáticas.



## **RESUMEN**

Este proyecto trata de abordar temas de modelado con fines educativos indispensables para acercar al estudiante a modelos complejos de sistemas que existen en el mundo físico, como en este caso es el segway. El desarrollo de este proyecto de grado se fundamenta en el uso del kit educativo Edumip, este dispositivo es un prototipo de un segway a pequeña escala. Este equipo tiene un gran potencial para desarrollar diferentes aplicaciones, se planteó estudiar de forma detallada el funcionamiento y corregir errores a nivel de software para garantizar un funcionamiento que no afectara la obtención del modelo, posterior a culminar la configuración, se abordó el estudio del modelo, el cual en principio es desconocido para esto se procede a obtener las variables necesarias por medio de experimentos, para así realizar una buena identificación por medio de un software, al mismo tiempo por medio de cálculos matemáticos se obtiene un modelo aproximado al comportamiento del sistema. Todos los experimentos que se han realizado fueron documentados, por ende, queda libre para quien quiera aplicarle algún método de control.

El fin del proyecto es encontrar y analizar el modelo del kit educativo Edumip para su posterior estudio y comprensión logrando ser destinado como una herramienta complementaria a la teoría de modelamiento. Los estudiantes del programa de Ingeniería Electrónica podrán contrastar con un dispositivo real identificando sus diferentes componentes y aplicando las herramientas de cálculos y programación obtenida en los diferentes cursos de control.

### **PALABRAS CLAVES:**

Algoritmo, identificación, Kit Edumip, MATLAB, modelamiento, segway, sistema embebido.

## **ABSTRACT**

This project tries to address modeling issues for educational purposes that are essential to bring the student closer to complex models of systems that exist in the physical world, such as the segway in this case. The development of this degree project is based on the use of the Edumip educational kit, this device is a prototype of a small-scale segway. This team has great potential to develop different applications, it was proposed to study in detail the operation and correct errors at the software level to guarantee an operation that did not affect the obtaining of the model, after completing the configuration, the study of the model was addressed That in principle is unknown, the next step is to obtain the necessary variables through experiments in order to carry out a good identification with appropriate software, at the same time by means of mathematical calculations an approximate model of the behavior of the system is obtained. All the experiments that have been carried out were documented, therefore, it is free for anyone who wants to apply a control method. The purpose of the project is to analyze and establish the model of the Edumip educational kit for its subsequent study and understanding, managing to be used as a complementary tool to modeling theory. Students of the Electronic Engineering program will be able to contrast with a real device by identifying its different components and applying the calculation and programming tools obtained in the different control courses.

**KEYWORDS:** Algorithm, Edumip kit, embedded system, Identification, MATLAB, modeling, segway.

## **1. OBJETIVOS**

### **1.1 OBJETIVO GENERAL**

- Determinar el modelo matemático del kit segway de Edumip.

### **1.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS**

- Modelar la dinámica de un péndulo invertido real, para que pueda ser usado en proyectos de control.
- Describir matemáticamente un MIP (péndulo invertido móvil) usando una combinación de técnicas de modelamiento y simulación.
- Comprender las prestaciones que tiene la BeagleBone para péndulos invertidos móviles

## **2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA**

### **2.1 DEFINICIÓN DEL PROBLEMA**

La necesidad de conocer el comportamiento de los sistemas con los que interactuamos a diario; mecánicos, eléctricos, biológicos entre otros, ha llevado a usar todo tipo de herramientas matemáticas y métodos de investigación, con el fin de hacer que dichos sistemas se ajusten a requerimientos específicos. La modificación del comportamiento final de un proceso se realiza en base al análisis transitorio en lo que se conoce como técnicas de control clásico. Este tipo de control es ampliamente usado en la actualidad debido a que finalmente todos los sistemas funcionan en un entorno analógico, lo que permite crear elementos de control discretos con requerimientos realmente pequeños de cómputo y que resultan muy efectivos. Todas estas ventajas se traducen en facilidades económicas para adquirir este tipo de elementos sobre todo en ambientes industriales. En este sentido, la teoría de control clásico es un conjunto de herramientas basadas en modelos matemáticos<sup>1</sup> que, a partir de análisis de la dinámica de los sistemas, permite establecer parámetros y características en valores requeridos para lograr un determinado comportamiento en los mismos.

La complejidad de un sistema depende de su naturaleza y por lo tanto para describirlo de forma matemática, se requiere usar muchas herramientas con el fin de hallar el modelo más fiel al comportamiento real. Esto conlleva a la generación de complicadas ecuaciones con parámetros que deben ser calculados o encontrados con métodos heurísticos. Dado que el control clásico parte del análisis transitorio de los sistemas, el modelo complica matemáticamente la implementación del control, ya que se requiere un modelo de control igual de complejo. En estos casos se establece un rango de permisibilidad, donde se espera un comportamiento confiable de la salida, para ello se asume como ideales ciertos parámetros o se limita la planta a un punto de operación, con el fin de simplificar el modelo y por ende el diseño del sistema de control.

---

<sup>1</sup> Tesis uson, capítulo 1, modelos y la importancia para la toma de decisiones, [Consultado: 10 de mayo 2022]  
Disponible: "<http://tesis.uson.mx/digital/tesis/docs/8701/Capitulo1.pdf>"

Aunque actualmente existen técnicas de control avanzado independientes de modelos<sup>2</sup>, cuya implementación resulta sencilla y de bajo costo, el control clásico no deja de ser el más usado en la industria, gracias a la robustez y confiabilidad que brinda. Las bondades de los métodos de control basados en modelos mencionadas anteriormente solo se pueden lograr si se eligen adecuadamente los parámetros y además se tiene una descripción matemática que representa fielmente el comportamiento real del sistema. Este motivo hace indispensable que se elija el modelo adecuado, dependiendo de los requerimientos, limitaciones y parámetros de la planta y el controlador.

Cuando se encuentra el modelo que se usa para representar un sistema se asume que todas las réplicas físicas de dicho sistema al poseer los mismos parámetros pueden ser descrito mediante el mismo modelo, esto se debe a que las variaciones de un sistema a otro no se consideran relevantes, lo que favorece la simplificación de modelos en donde no se requiere exactitud. Para el caso de estudio se busca obtener una descripción matemática lo más exacta posible para un sistema embebido que simula el comportamiento de un péndulo invertido, lo que significa que el modelo final solamente representará fielmente el dispositivo usado.

En la universidad se cuenta con diferentes plantas que permiten realizar el control de procesos que en su mayoría son estables; sin embargo, no existen plantas que sean de naturaleza inestable que permitan a los estudiantes aplicar sus conocimientos de diseño de sistemas de control. Este proyecto pretende aportar una descripción matemática del Edumip, aplicando para ello técnicas de modelamiento e identificación. Ya que como se sabe, casi el 90% del tiempo invertido en el diseño de un control se dedica a la obtención de la representación matemática del proceso. ¿ El modelo del MIP servirá de material para los estudiantes que en un futuro utilicen el Edumip como planta para controlar?

---

<sup>2</sup> ¿Qué es el control avanzado? [Revista]. Escuela especializada en ingeniería itca-fepade Consultado: 10 de mayo 2022, Disponible: <http://www.redicces.org.sv/jspui/bitstream/10972/482/1/Control%20avanzado.pdf>

## 2.2 JUSTIFICACIÓN

En el amplio entorno de la robótica se ha reflejado un creciente interés enfocado en los robots basados en un péndulo invertido, por dos motivos principalmente; el primero es por el diseño de estos dispositivos aprovechando la ventaja de controlar su equilibrio, la aplicación más popular es el Segway, en donde se aprovecha la ventaja característica de este sistema para crear un vehículo al cual se le ha dado un amplio uso para la vigilancia en centros comerciales, también muchas fuerzas policiales han optado por el uso de este dispositivo para patrullar<sup>3</sup>. El segundo motivo se debe a su comportamiento no lineal y sistema de dinámica inestable, que es de amplio interés para la formación de los estudiantes de ingeniería durante su pregrado, porque son sistemas que tiene un grado de dificultad mayor al momento de realizar su control, además necesitan tener un modelo que describa de una manera confiable el comportamiento real del sistema.

El continuo interés por estos sistemas basados en un péndulo invertido fue la razón de realizar este proyecto, el comportamiento de esta clase de sistemas se necesita depende de un buen modelamiento para que pueda lograr un resultado adecuado para su estabilidad vertical ante perturbaciones. En este proyecto que pretende fines educativos se elige el kit Edumip que se encuentra en las instalaciones de la universidad Surcolombiana. Este kit contiene un sistema embebido que permite ser configurado como un péndulo invertido móvil, al tratarse de un péndulo invertido este sistema no puede funcionar correctamente sin alguna acción de control. Tanto la simulación del sistema como la acción de control se realizan con el sistema embebido. También como un objetivo con este trabajo de grado es que los estudiantes puedan hacer simulación del comportamiento, modelamiento, diseño de controladores, entre otras pruebas, la universidad cuenta con un software licenciado que es MATLAB, el cual se escogió para que a futuro no se genere ningún inconveniente por temas de acceso.

---

<sup>3</sup> Segway PT [Revista]. Equipamiento y servicios municipales, Consultado: 10 de mayo 2022, Disponible:” <https://www.eysmunicipales.es/actualidad/segway-pt-la-solucion-al-patrullaje-para-los-cuerpos-de-seguridad-y-vigilancia>”

Para la creación del modelo se debe comprobar todas las variables del sistema de manera experimental, por lo cual se realizan diferentes pruebas para encontrar cada uno de los valores que sea necesario. Es importante aclarar que los sistemas varían su comportamiento por diferentes aspectos que conlleva su tiempo de uso, en el kit Edumip surgen por el desgaste en las piezas mecánicas por rozamiento, entre otros factores, lo importante es poder replicar los experimentos para siempre tener la certeza de que cuando se use el sistema se obtenga el modelo más exacto. Con respecto a la creación del modelo se expresa los efectos físicos y dinámicos del sistema de manera simplificada en una ecuación diferencial y algebraica teniendo en cuenta las leyes conservadoras y las leyes de propiedad de la disciplina, para finalmente reducir las ecuaciones a un conveniente modelo matemático.

Aunque a nivel industrial con técnicas más avanzadas de control se depende menos del modelo del sistema y se puede tener un modelo en donde se puedan despreciar ciertas características para crear una representación más simplificada. Es interesante introducir al ámbito educativo el estudio de sistemas cuyas respuestas requieran de exactitud ya que día a día surgen sistemas complejos que demandan este tipo de modelos, como por ejemplo los robots para cirugías de alta precisión entre ellos el de como Da Vinci <sup>4</sup> o las recientes misiones espaciales llamados Rover o astromóvil <sup>5</sup>.

En este proyecto se aborda temas de modelamiento e identificación con propósitos de educación, con el fin de brindar un apoyo al estudiante por medio de implementación práctica con el kit educativo Edumip. Con esta manera se logra reforzar los conocimientos de los cursos de control ofrecidos en la universidad, al acercar al estudiante a modelar este tipo de sistemas inestables y embebidos.

---

<sup>4</sup> Técnicas Avanzadas de Cirugía Robótica, S.L., "Cirugía Robótica Da Vinci", [Consultado: 3 de marzo 2022] Disponible: <http://www.icirugiarobotica.com/cirugia-robotica-da-vinci/>

<sup>5</sup> [robotespacial.com](https://robotespacial.com/#:~:text=Definimos%20como%20robot%20espacial%2C%20Rover,de%20reconocimiento%20en%20el%20espacio.), "Que es un robot espacial y ejemplos" [Consultado: 3 de marzo 2022] Disponible: <https://robotespacial.com/#:~:text=Definimos%20como%20robot%20espacial%2C%20Rover,de%20reconocimiento%20en%20el%20espacio.>

### 3. FUNDAMENTOS BÁSICOS

Para la comprensión de lector se crea esta sección para abordar conceptos básicos que son utilizados a lo largo de este proyecto. En los capítulos anteriores se habla acerca del péndulo invertido, el péndulo invertido constituye uno de los sistemas no lineales más utilizados para la experimentación de diferentes estrategias de modelamiento, por su dinámica no lineal que permite comprender los fenómenos y comportamientos físicos de plantas y equipos presentes en diferentes ámbitos <sup>6</sup>. La importancia de comprender el funcionamiento y la definición de este sistema parte de que toda la investigación que se desarrolla es en base a un subtipo que se denomina M.I.P. o péndulo invertido móvil. Esta variación de péndulo invertido tiene la ventaja que se puede desplazar, por lo cual en la industria se utiliza mucho en el área de vehículos eléctricos unipersonales, la compañía segway, ha diseñado varios vehículos donde el conductor introduce como referencia la velocidad y dirección, mientras el vehículo debe mantener el equilibrio, a partir de ello se han diseñado diferentes segways en el entorno investigativo y de enseñanza, entre ellos encontramos el Kit Edumip (Figura 1), que es el dispositivo que se elige para realizar este proyecto, este es un robot que por medio de un sistema embebido BeagleBone y un conjunto de periféricos replica el comportamiento de un segway pero a una menor escala.

Figura 1. Robot Edumip



---

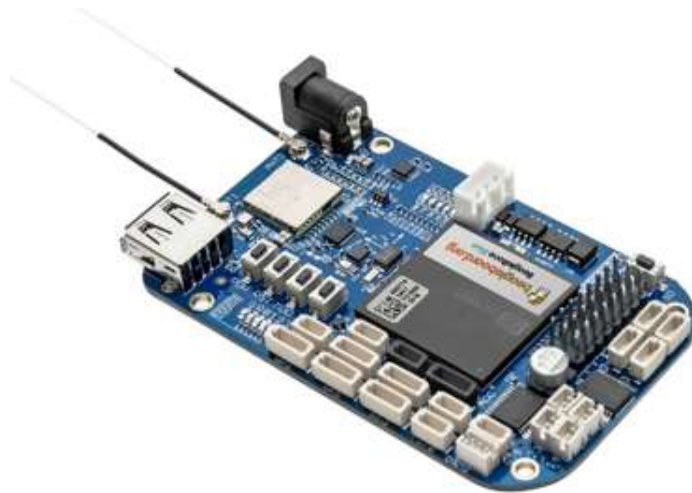
<sup>6</sup> J. Aracil and F. Gordillo, "El péndulo invertido: un desafío para el control no lineal", Revista Iberoamericana de Automática e Información Industrial, vol. 2, No. 2, Apr, 2005.



El Kit Edumip viene incorporado con un sistema embebido. Un sistema embebido (también conocido como “empotrado”, “incrustado” o “integrado”)<sup>7</sup> es un sistema de computación diseñado para realizar funciones específicas, y cuyos componentes se encuentran integrados en una placa base (en inglés. “motherboard”). El procesamiento central del sistema se lleva a cabo gracias a un microcontrolador, es decir, un microprocesador que incluye además interfaces de entrada/salida, así como una memoria de tamaño reducido en el mismo chip.

Se diseñaron para cubrir necesidades específicas, todos sus componentes se encuentran incluidos en una placa con el fin de economizar costos y brindar comodidad, entre ellas se encontró el sistema embebido móvil de bajo costo utilizando la tarjeta de BeagleBone blue o placa computadora de hardware libre de bajo costo, fue diseñada por un grupo de ingenieros con el propósito de ser una placa educativa que podría ser usada en colegios y universidad alrededor del mundo fomentando las capacidades de software y hardware libre.

Figura 2. Tarjeta BeagleBone



Este dispositivo cuenta con diferentes sensores, para este proyecto se utilizan dos tipos de sensores que ya vienen incorporado en el kit Edumip. Para medir la inclinación del kit se utiliza un MPU-9250. Este es el primer dispositivo

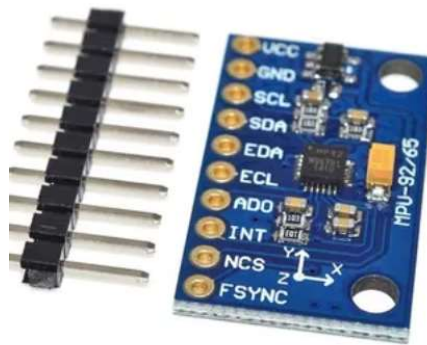
---

<sup>7</sup> Tribalbyte Technologies, “Sistemas embebidos y sus características”, [Consultado: 3 de marzo 2022]  
Disponible: <https://tech.tribalyte.eu/blog-sistema-embebido-caracteristicas>

MotionTracking de 9 ejes del mundo diseñado para los requisitos de bajo consumo, bajo costo y alto rendimiento de los equipos de electrónica, incluidos teléfonos inteligentes, tabletas y sensores portátiles.

El MPU-9250 está conformado por un sistema en paquete (SIP) que combina dos chips: el MPU-6050, que contiene un giroscopio de 3 ejes, un acelerómetro de 3 ejes y un procesador de movimiento digital (DMP) integrado capaz de procesar complejos algoritmos de fusión de movimiento y el AK8975, una brújula digital de 3 ejes. Los algoritmos de fusión de movimiento de 6 ejes integrados de la pieza acceden a todos los sensores internos para recopilar un conjunto completo de datos de sensores. La pieza se ofrece en un paquete LGA (sistema de pines para conectar chip a la board, en este caso la placa tiene pines y el chip solo tiene contactos) de 4x4x1mm que facilita su instalación en placas con espacio limitado.<sup>8</sup>

*Figura 3. SENSOR MPU-9250*



El otro sensor que se usa es un encoder, este es un dispositivo de detección que proporciona una respuesta. Los encoders convierten el movimiento en una señal eléctrica que puede ser leída por algún tipo de dispositivo de control en un sistema de control de movimiento. El encoder envía una señal de respuesta que se usa para determinar la posición, velocidad o dirección de un sistema. Existen diferentes tipos de encoder y el que utiliza el Edumip es el encoder de cuadratura.

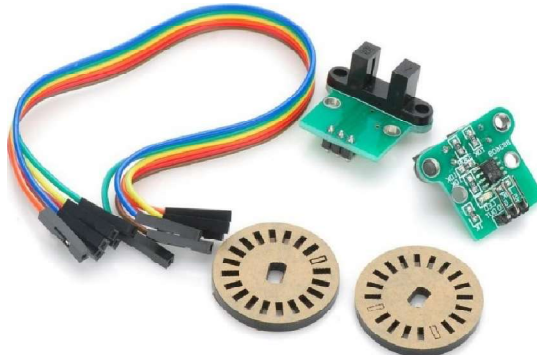
El encoder de cuadratura, corresponde a un tipo de encoder incremental que utiliza dos sensores ópticos posicionados con un desplazamiento de 1/4 de ranura el uno del otro, generando dos señales de pulsos digitales desfasada en 90° o en

---

<sup>8</sup> MPU-9250 [blog]. TDK InvenSense. [Consultado: 9 de noviembre 2020] Disponible: <https://invensense.tdk.com/products/motion-tracking/9-axis/mpu-9150/>

cuadratura. A estas señales de salida, se les llama comúnmente A y B. Mediante ellas es posible suministrar los datos de posición, velocidad y dirección de rotación del eje.<sup>9</sup>

*Figura 4. Encoder*



Para poder simular el comportamiento de un péndulo invertido, se debe ejecutar un programa con todas las instrucciones, también se debe configurar los drivers para los motores, encoders, MPU, entre otros. La BeagleBone por medio del sistema operativo Debian configura todos los dispositivos. El sistema operativo Debian fue lanzado por primera vez en 1996 por Ian Murdock. Este sistema operativo está compuesto por paquetes de software de código abierto. Esto significa que el software es gratuito y está abierto al público con una licencia mayoritaria GNU (licencia pública general) y otras licencias de software<sup>10</sup>. Esta incorporado en el Kit Edumip, con modificaciones para controlar todos los periféricos asociados al robot, cabe resaltar que el sistema Debian que se utiliza viene habilitado para instalar paquetes y diferentes herramientas, todo mediante consola, no tiene una interfaz gráfica. Todo lo relacionado a instalación de paquetes para el kit se muestra a detalle en la sección de Anexos.

El objetivo principal de este proyecto se basa en el modelamiento del kit, una de las mejores herramientas para encontrar un modelo aproximado es MATLAB. Millones de ingenieros y científicos de todo el mundo usan MATLAB para analizar y diseñar los sistemas y productos que transforman nuestro mundo. MATLAB está presente en sistemas de seguridad activa de automóviles, naves espaciales interplanetarias, dispositivos de monitorización de la salud, redes eléctricas

---

<sup>9</sup> ¿Qué es un Encoder? [blog]. Ingeniería Mecafenix 28 abril, 2017 Consultado: 15 de diciembre 2020] Disponible: <https://www.ingmecafenix.com/automatizacion/encoder/>

<sup>10</sup> ¿Qué es un Debian GNU/Linux? [blog]. instalar Debian GNU/Linux 9 en mipsel Consultado: 15 de diciembre 2020] Disponible: <https://www.debian.org/releases/stretch/mipsel/index.html.es>

inteligentes y redes móviles LTE (Long Term Evolution). Se utiliza para aprendizaje automático, procesamiento de señales, procesamiento de imágenes, visión artificial, comunicaciones, finanzas computacionales, diseño de control, robótica y muchos otros campos <sup>11</sup>.

MATLAB es un software muy extenso, como se mencionó anteriormente, por lo cual el contiene diferentes herramientas para cada una de las tareas específicas, como se necesita encontrar un modelo se utiliza el módulo de Simulink, el cual es una toolbox especial de MATLAB que sirve para simular el comportamiento de los sistemas dinámicos. Puede simular sistemas lineales y no lineales, modelos en tiempo continuo y tiempo discreto y sistemas híbridos de todos los anteriores.<sup>12</sup> Es un entorno de diagramas de bloque para la simulación multidominio y el diseño basado en modelos. Admite el diseño y la simulación a nivel de sistema, la generación automática de código, la prueba y verificación continua de los sistemas embebidos como en este caso es el de BeagleBone. Ofrece un editor gráfico, bibliotecas de bloques personalizables y solucionadores matemáticos para modelar y simular sistemas.

El modelo del sistema se hace uso de métodos matemáticos, para simplificar las ecuaciones de mayor complejidad. El método de Lagrange llamada así en honor de Joseph Louis Lagrange, es un método por el cual ajusta una ecuación dependiendo de la necesidad, maximizándola o minimizándola con algunas restricciones. Este método reduce el problema restringido en  $n$  variables en uno sin restricciones de  $n + 1$  variables cuyas ecuaciones pueden ser resueltas.<sup>13</sup> En este proyecto por medio de Lagrange se obtiene las ecuaciones de movimiento, se utiliza el método que está en la sección 1.6 del libro "Systems and Control" <sup>14</sup> del

---

<sup>11</sup> MATHWORKS. Descripción del producto MATLAB. 20 de marzo de 2021, [Consultado: 15 de diciembre de 2019]. Disponible en: [https://es.mathworks.com/help/matlab/learn\\_matlab/product-description.html](https://es.mathworks.com/help/matlab/learn_matlab/product-description.html)

<sup>12</sup> ETSETB. MATLAB. Fundamentos y/o Aplicaciones. Curso 11/12b, Tema 5. Simulink [Consultado: 20 de marzo de 2021]. Disponible en: [https://upcommons.upc.edu/bitstream/handle/2117/192916/tema\\_5\\_simulink-5156.pdf?sequence=7&isAllowed=y#:~:text=SIMULINK%20es%20una%20toolbox%20especial,comportamiento%20de%20los%20sistemas%20din%C3%A1micos.&text=Es%20un%20entorno%20gr%C3%A1fico%20en,dife. \]](https://upcommons.upc.edu/bitstream/handle/2117/192916/tema_5_simulink-5156.pdf?sequence=7&isAllowed=y#:~:text=SIMULINK%20es%20una%20toolbox%20especial,comportamiento%20de%20los%20sistemas%20din%C3%A1micos.&text=Es%20un%20entorno%20gr%C3%A1fico%20en,dife.)

<sup>13</sup> ECURED.LAGRANGE sección, Generalidades [Consultado: 20 de marzo de 2021]. Disponible en: [https://www.ecured.cu/M%C3%A9todo\\_de\\_Lagrange](https://www.ecured.cu/M%C3%A9todo_de_Lagrange)

profesor Stanislaw H. Zack. Se trabaja con el fin de encontrar la masa puntual del sistema, teniendo en cuenta que fuerza es igual a masa multiplicada por aceleración, se representa mediante ecuaciones diferenciales.

---

<sup>14</sup> Systems and Control, Stanislaw H. Zak. Disponible en: [https://www.researchgate.net/profile/Ali-Arshad-6/post/How-do-time-domain-control-techniques-SMC-account-for-transient-response-specifications/attachment/59d6270379197b80779854ee/AS%3A324276094210049%401454324853865/download/1810\\_app.pdf](https://www.researchgate.net/profile/Ali-Arshad-6/post/How-do-time-domain-control-techniques-SMC-account-for-transient-response-specifications/attachment/59d6270379197b80779854ee/AS%3A324276094210049%401454324853865/download/1810_app.pdf)

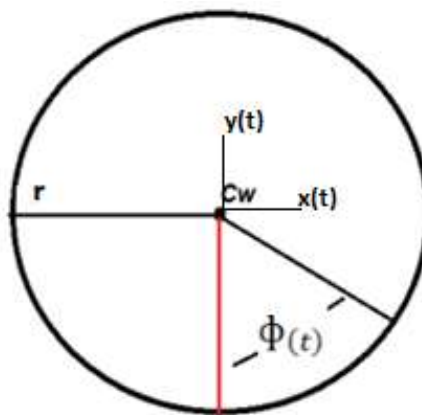
#### 4. CÁLCULOS Y ESTIMACIÓN DEL MODELO

Para calcular el modelo del Kit Edumip se plantea un sistema simple que consta de un cuerpo unido con un eje, y éste a su vez está unido a dos llantas, la importancia para describir el modelo de este sistema radica en plantear las variables que se necesitan para controlar la inclinación del cuerpo. Las variables que se toman de salida son dos ángulos que representan la posición de cada una de las partes del sistema, el primer ángulo se representa con la letra  $\theta$ , este representa la inclinación del cuerpo medida en ángulo, todo el sistema de control busca mantener este ángulo en equilibrio alrededor de 0 rad, que en temas prácticos significa que el cuerpo esta perpendicular a la superficie de apoyo. El segundo ángulo representa el desplazamiento angular de las llantas para este proyecto se le conoce como  $\phi$ , este ángulo continuamente se adquiere para controlar la magnitud del estímulo que se debe ingresar a los actuadores.

El primer paso para desarrollar este modelo es encontrar el centro de masa tanto para el cuerpo, como para las ruedas. Esto permite saber en qué punto se vuelve estable cada uno de los componentes del sistema.

Para encontrar el centro de masa de la llanta, la cual se denota con la letra ( $C_w$ ), se tiene en cuenta el radio y el ángulo, a continuación, se describe como se halla la relación para el centro de masa:

*Figura 5. Plano de la Rueda*



*Nota. Fuente propia*

En el gráfico anterior se muestra cómo se estructura para hallar esta magnitud, a continuación, se explica la descripción de cada una de las variables, que se van a utilizar:

*Tabla 1. Parámetros de las llantas.*

$X_{(t)}$	<i>Desplazamiento</i>
$C_w$	<i>Centro de masa</i>
$\phi_{(t)}$	<i>Angulo de llanta</i>
$r$	<i>Radio de llanta</i>

El origen del sistema de coordenadas se establece a partir del centro de masa de las ruedas ( $C_w$ ) cuando el Edumip está en movimiento, donde el componente en  $x$  equivale al desplazamiento (traslación) de las llantas. En los cálculos, se toman valores positivos para aumentos de los ángulos en sentido horario, y negativos para aumentos en sentido antihorario.

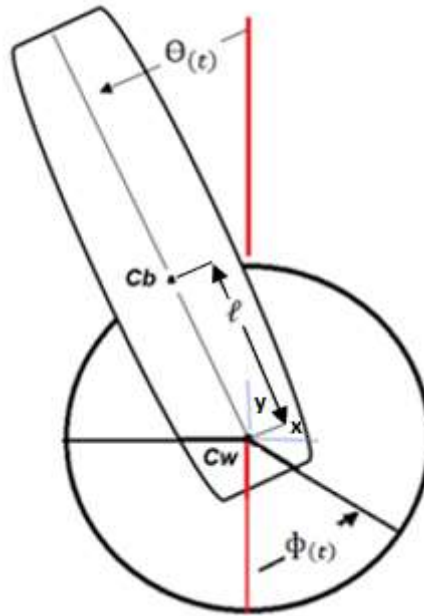
$$\begin{aligned}
 C_{w(x,y)} &= (X_{(t)}, 0) \\
 X_{(t)} &= r(-\phi_{(t)}) \\
 X_{(t)} &= (-r \cdot \phi_{(t)}) \\
 C_{w(x,y)} &= (-r \cdot \phi_{(t)}, 0)
 \end{aligned}$$

Ya teniendo el centro de masa de la rueda  $C_w$ , se puede hallar la velocidad del movimiento de las llantas

$$\begin{aligned}
 V_w &= \dot{C}_w \\
 V_{w(x,y)} &= \frac{d(-r \cdot \phi_{(t)}, 0)}{dt} \\
 V_{w(x,y)} &= \dot{C}_w = (-r \cdot \dot{\phi}_{(t)}, 0)
 \end{aligned} \tag{1}$$

Se procede a hallar el centro de masa del cuerpo  $C_b$

Figura 6. Plano de Edumip



Nota. Adaptado de LQG controller design of inverted pendulum system [Figura], por ZHUO, ZHU. 2017, (<https://escholarship.org/uc/item/9dz4g2z3>).

El centro de masa del cuerpo <sup>15</sup>, se encuentra en la mitad de la longitud del cuerpo, se denota con la letra de  $C_b$ , para hallarlo se debe tener en cuenta la interacción con las llantas. A continuación, se muestra cómo se halla las componentes coordenadas, en donde  $l$  es la longitud entre  $C_w$  y  $C_b$ .

En el eje  $x$  se tiene el movimiento de las llantas (traslación) y la componente en  $x$  del movimiento del cuerpo, ambos en sentido antihorario.

$$C_{b(x)} = -r * \phi(t) - l * \sin(\Theta(t))$$

Para el eje  $y$  se presenta solo la componente en  $y$  del movimiento del cuerpo

$$C_{b(y)} = l * \cos(\Theta(t))$$

---

<sup>15</sup> ¿Qué es centro de masa?, Khan academy Disponible en: <https://es.khanacademy.org/science/physics/linear-momentum/center-of-mass/a/what-is-center-of-mass>



Estas componentes permiten conocer el centro de masa del cuerpo:

$$C_{b(x,y)} = [ (-r * \phi_{(t)} - l * \text{sen}(\theta_{(t)})) , (l * \text{cos}(\theta_{(t)})) ]$$

La velocidad del movimiento del cuerpo se encuentra a partir de  $C_b$ , de la misma forma como se hizo para encontrar la velocidad del movimiento de las llantas a partir de su centro de masa. Como se puede evidenciar las derivadas tienden ser largas, aunque poco complejas por lo cual se separa para cada una de las componentes, y después por suma de componentes se halla el valor total.

$$V_{b(x,y)} = \frac{d \left( [ (-r * \phi_{(t)} - l * \text{sen}(\theta_{(t)})) . (l * \text{cos}(\theta_{(t)})) ] \right)}{dt}$$

$$V_{b(x)} = [0 * \phi_{(t)} + (-r) * \dot{\phi}_{(t)}] - [0 * \text{sen}(\theta_{(t)}) + l * \text{cos}(\theta_{(t)}) * \dot{\theta}_{(t)}]$$

$$V_{b(x)} = -r * \dot{\phi}_{(t)} - l * \text{cos}(\theta_{(t)}) * \dot{\theta}_{(t)}$$

$$V_{b(y)} = l * \text{cos}(\theta_{(t)})$$

$$V_{b(y)} = [0 * \text{cos}(\theta_{(t)}) + l * (-\text{sin}(\theta_{(t)}) * \dot{\theta}_{(t)})]$$

$$V_{b(y)} = -l * \text{sin}(\theta_{(t)}) * \dot{\theta}_{(t)}$$

$$V_{b(x,y)} = ( [-r * \dot{\phi}_{(t)} - l * \text{cos}(\theta_{(t)}) * \dot{\theta}_{(t)}] , [-l * \text{sin}(\theta_{(t)}) * \dot{\theta}_{(t)}] ) \quad (2)$$

Después de encontrar las velocidades para ambas partes del sistema, se hace uso de la ecuación de Lagrange, la cual permite disminuir los cálculos, y no se centra en calcular la influencia de la restricción del cuerpo en un momento dado, cada vez más se hace uso de esta ecuación ya que permite que los ordenadores lo hagan de una manera más eficiente. La función Lagrangiana, expresa que el operador de Lagrange es igual a la diferencia entre la energía cinética y la energía potencial gravitacional. Una vez sabiendo esto se procede a calcular la energía del sistema. Luego de obtener esta relación de energías (cinética y potencial gravitacional) se utilizan dos ecuaciones diferenciales que equivalen al torque en función del tiempo.

A continuación, se muestra la función Lagrangiana y las respectivas ecuaciones diferenciales que son equivalentes al torque:

$$L = K - U \quad (3)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{dL}{d\dot{\theta}} \right) - \frac{dL}{d\theta} = -\mathcal{T}(t) \quad (4)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{dL}{d\dot{\phi}} \right) - \frac{dL}{d\phi} = \mathcal{T}(t) \quad (5)$$

Teniendo la velocidad angular se procede a encontrar la energía cinética del sistema con la siguiente formula

$$K = \frac{1}{2} M \cdot v^2 \quad \text{o} \quad K = \frac{1}{2} \cdot I \cdot \dot{\phi}_{(t)}^2$$

*Tabla 2. Parámetros del sistema.*

$I_w = M_w * \frac{r^2}{2} + G_r^2 * I_m$	<i>Inercia de una sola rueda con transmisión por engranaje</i>
$M_b$	<i>Masa del cuerpo</i>
$M_w$	<i>Masa de las llantas</i>
$G_r$	<i>Relación de transmisión de los engranajes</i>
$I_b$	<i>Inercia del cuerpo</i>
$I_m$	<i>Inercia del inducido del motor</i>
$w_w$	<i>Velocidad de las llantas</i>

Como se tiene la masa del cuerpo y del par de llantas se procede a reemplazar en la energía cinética

$$K = \frac{1}{2} M_b * V_b^2 + 2 * \left( \frac{1}{2} M_w * V_w^2 \right) + \frac{1}{2} * I_b * (\dot{\theta}_{(t)})^2 + 2 * \left( \frac{1}{2} I_w * (\dot{\phi}_{(t)})^2 \right) \quad (6)$$

De la ecuación (3), (u) es la energía gravitacional.

$$u = M_b * g * l * \cos\theta_{(t)} \quad (7)$$

Se continúa encontrando la magnitud de la velocidad de las llantas a partir de las componentes de  $V_w$

$$|V_w| = \sqrt{0^2 + r * \dot{\phi}_{(t)}^2}$$

$$|V_w| = r * \dot{\phi}_{(t)}$$

Ahora la magnitud de velocidad del cuerpo

$$|V_b| = \sqrt{[(-l * \sin \theta_{(t)} * \dot{\theta}_{(t)})^2 + (-r * \dot{\phi}_{(t)} - l * \cos(\theta_{(t)}) * \dot{\theta}_{(t)})^2]}$$

Aplicando la identidad trigonométrica pitagórica

$$\sin^2 \theta_{(t)} + \cos^2 \theta_{(t)} = 1$$

$$|V_b| = \sqrt{r^2 * \dot{\phi}_{(t)}^2 + 2 * r * l * \dot{\phi}_{(t)} * \dot{\theta}_{(t)} * \cos(\theta_{(t)}) + l^2 * \dot{\theta}_{(t)}^2}$$

Reemplazando en la ecuación (3) con las ecuaciones (6) y (7).

$$L = \left[ \frac{1}{2} M_b * (r^2 * \dot{\phi}_{(t)}^2 + 2 * r * l * \dot{\phi}_{(t)} * \dot{\theta}_{(t)} * \cos(\theta_{(t)}) + l^2 * \dot{\theta}_{(t)}^2) + M_w * (r * \dot{\phi}_{(t)})^2 + \frac{1}{2} I_b * \dot{\theta}_{(t)}^2 + I_w * \dot{\phi}_{(t)}^2 \right] - [M_b * g * l * \cos(\theta_{(t)})] \quad (8)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{dL}{d\dot{\theta}_{(t)}} \right) = \frac{d}{dt} \left( -\frac{1}{2} M_b (2 * r * l * \dot{\phi}_{(t)} * \dot{\theta}_{(t)} * \sin(\theta_{(t)})) + M_b * g * l * \sin(\theta_{(t)}) \right) \quad (9)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{dL}{d\dot{\theta}_{(t)}} \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} M_b (2 * r * l * \dot{\phi}_{(t)} * \cos(\theta_{(t)}) + 2 * l^2 * \dot{\theta}_{(t)}) + I_b * \dot{\theta}_{(t)} \right) \quad (10)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{dL}{d\dot{\theta}_{(t)}} \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{M_b}{2} (2 * r * l (\ddot{\phi}_{(t)} * \cos(\theta_{(t)}) - \dot{\phi}_{(t)} * \dot{\theta}_{(t)} * \sin(\theta_{(t)})) + 2 * l^2 * \ddot{\theta}_{(t)}) + I_b * \ddot{\theta}_{(t)} \right) \quad (11)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{dL}{d\dot{\phi}_{(t)}} \right) = 0 \quad (12)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{dL}{d\dot{\phi}_{(t)}} \right) = \frac{1}{2} M_b \left( 2 * r^2 * \ddot{\phi}_{(t)} + 2 * r * l * \ddot{\theta}_{(t)} * \cos(\theta_{(t)}) - \dot{\theta}_{(t)}^2 \sin(\theta_{(t)}) \right) + 2 * M_w * r^2 * \ddot{\phi}_{(t)} + I_b * \ddot{\phi}_{(t)} + 2 * I_w * \ddot{\phi}_{(t)} \quad (13)$$

De las ecuaciones (4), (9) y (10)

$$-\mathcal{T}(t) = M_b * r * l * \ddot{\phi}_{(t)} * \cos(\theta_{(t)}) + M_b * l^2 * \ddot{\theta}_{(t)} + I_b \ddot{\theta}_{(t)} - M_b * g * l * \sin(\theta_{(t)})$$

$$-\mathcal{T}(t) = (I_b + M_b * l^2) * \ddot{\theta}_{(t)} + M_b * l * (r * \ddot{\phi}_{(t)} * \cos(\theta_{(t)}) - g * \sin(\theta_{(t)})) \quad (14)$$

De las ecuaciones (5), (12) y (13)

$$\mathcal{T}(t) = M_b * r^2 * \ddot{\phi}_{(t)} + M_b * r * l (\ddot{\theta}_{(t)} * \cos(\theta_{(t)}) - \dot{\theta}_{(t)}^2 \sin(\theta_{(t)})) + 2 * M_w * r^2 * \ddot{\phi}_{(t)} + 2 * I_w * \ddot{\phi}_{(t)}$$

$$\mathcal{T}(t) = M_b * r * l * \cos(\theta_{(t)}) * \ddot{\theta}_{(t)} - M_b * r * l * \sin(\theta_{(t)}) * \dot{\theta}_{(t)}^2 + (2 * I_w + (M_b + 2 * M_w) r^2) \ddot{\phi}_{(t)} \quad (15)$$

Se procede a encontrar la velocidad de las llantas ( $w_w$ )

$$w_w = \dot{\phi}_{(t)} - \dot{\theta}_{(t)} = w_m / G_r$$

$$\mathcal{T}(t) = 2G_r(\bar{s} * u - k * w_m)$$

*Tabla 3. Parámetros del motor.*

$V_{(t)}$	<i>voltaje del motor</i>
$V_{max}$	<i>voltaje máximo del motor</i>
$u = V_{(t)} / V_{max}$	<i>Ciclo de trabajo del motor normalizado</i>
$\bar{s}$	<i>Par de bloqueo del motor</i>
$k$	<i>constante del motor</i>
$w_m$	<i>velocidad del inducido del motor</i>

Para tener un poco de orden se opta por simplificar las ecuaciones (14) y (15) reemplazando algunos términos por una variable.

*Tabla 4. Equivalentes para simplificar.*

$a$	$2I_w + (m_b + 2m_w)r^2$
$b$	$m_b r l$
$c$	$I_b + m_b l^2$
$d$	$m_b g l$
$e$	$2G_r \bar{s} / V_{max}$
$f$	$2G_r^2 k$

$$d * \text{sen}(\Theta_{(t)}) + f * \dot{\phi}_{(t)} = e * v + f * \dot{\theta}_{(t)} + c * \ddot{\Theta}_{(t)} + b * \cos(\Theta_{(t)}) * \ddot{\phi}_{(t)} \quad (16)$$

$$f * \dot{\phi}_{(t)} + b * \cos(\Theta_{(t)}) * \ddot{\Theta}_{(t)} + a * \ddot{\phi}_{(t)} = e * v + \dot{\theta}_{(t)}(f + b * \text{sen}(\Theta_{(t)}) * \dot{\theta}_{(t)}) \quad (17)$$

Resolviendo para  $\ddot{\phi}_{(t)}$  de (16) y (17) con el fin de hallar  $\ddot{\Theta}_{(t)}$

$$\ddot{\phi}_{(t)} = \frac{d * \text{sen}(\Theta_{(t)}) + f * \dot{\phi}_{(t)} - e * v - f * \dot{\theta}_{(t)} - c * \ddot{\Theta}_{(t)}}{b * \cos(\Theta_{(t)})}$$

$$\ddot{\phi}_{(t)} = \frac{e * v + \dot{\theta}_{(t)}(f + b * \text{sen}(\Theta_{(t)}) * \dot{\theta}_{(t)}) - f * \dot{\phi}_{(t)} - b * \cos(\Theta_{(t)}) * \ddot{\Theta}_{(t)}}{a}$$

Igualando las dos expresiones anteriores

$$\begin{aligned} a * d * \text{sen}(\Theta_{(t)}) + a * f * \dot{\phi}_{(t)} - a * e * v - a * f * \dot{\theta}_{(t)} - a * c * \ddot{\Theta}_{(t)} \\ = e * v * b * \cos(\Theta_{(t)}) + b * \cos(\Theta_{(t)}) * \left( \dot{\theta}_{(t)}(f + b * \text{sen}(\Theta_{(t)}) * \dot{\theta}_{(t)}) \right) - f \\ * b * \cos(\Theta_{(t)}) * \dot{\phi}_{(t)} - b^2 * \cos^2(\Theta_{(t)}) * \ddot{\Theta}_{(t)} \end{aligned}$$

$$\ddot{\theta}_{(t)} = \frac{-1}{a * c - b^2 * \cos(\theta_{(t)})^2} \left( -a * d * \sin(\theta_{(t)}) + a * e * v + e * v * b * \cos(\theta_{(t)}) + a * f * \dot{\phi}_{(t)} + b * f * \cos(\theta_{(t)}) * \dot{\phi}_{(t)} + b^2 * \cos(\theta_{(t)}) * \sin(\theta_{(t)}) * \dot{\theta}_{(t)}^2 - a * f * \dot{\phi}_{(t)} - b * f * \cos(\theta_{(t)}) * \dot{\phi}_{(t)} \right) \quad (18)$$

Resolviendo para  $\ddot{\theta}_{(t)}$  de (16) y (17) con el fin de hallar  $\ddot{\phi}_{(t)}$

$$\ddot{\theta}_{(t)} = \frac{d * \sin(\theta_{(t)}) + f * \dot{\phi}_{(t)} - e * v - f * \dot{\theta}_{(t)} - b * \cos(\theta_{(t)}) * \ddot{\phi}_{(t)}}{c}$$

$$\ddot{\theta}_{(t)} = \frac{e * v + \dot{\theta}_{(t)}(f + b * \sin(\theta_{(t)} * \dot{\theta}_{(t)})) - a * \ddot{\phi}_{(t)} - f * \dot{\phi}_{(t)}}{b * \cos(\theta_{(t)})}$$

Igualando las dos expresiones anteriores

$$\begin{aligned} & b * d * \cos(\theta_{(t)}) * \sin(\theta_{(t)}) + b * f * \cos(\theta_{(t)}) * \dot{\phi}_{(t)} - b * e * v * \cos(\theta_{(t)}) - b * f * \\ & * \cos(\theta_{(t)}) * \dot{\theta}_{(t)} - \ddot{\phi}_{(t)} * b^2 * \cos^2(\theta_{(t)}) \\ & = c * e * v + c * \dot{\theta}_{(t)}(f + b * \sin(\theta_{(t)}) * \dot{\theta}_{(t)}) - a * c * \ddot{\phi}_{(t)} - c * f * \dot{\phi}_{(t)} \end{aligned}$$

$$\ddot{\phi}_{(t)} = -\frac{1}{a * c - b^2 * \cos^2(\theta_{(t)})} \left( -b * d * \cos(\theta_{(t)}) * \sin(\theta_{(t)}) + b * e * v * \cos(\theta_{(t)}) + c * e * v + b * f * \cos(\theta_{(t)}) * \dot{\theta}_{(t)} + c * f * \dot{\theta}_{(t)} + b * c * \sin(\theta_{(t)}) * \dot{\theta}_{(t)}^2 - b * f * \cos(\theta_{(t)}) * \dot{\phi}_{(t)} - c * f * \dot{\phi}_{(t)} \right) \quad (19)$$

Las ecuaciones (18) y (19) corresponden al modelo no lineal del sistema, para linealizarlo se usa el punto de interés en equilibrio donde se cumple lo siguiente

$$\theta_{(t)} = 0, \quad \dot{\theta}_{(t)} = 0, \quad \dot{\phi}_{(t)} = 0, \quad v = 0$$

$$\ddot{\theta}_{(t)} = \frac{-1}{ac-b^2} \left( -a * d * \sin(\theta_{(t)}) + e(a+b)v_{(t)} + f(a+b)\dot{\theta}_{(t)} - f(a+b) * \dot{\phi}_{(t)} \right) \quad (20)$$

En la ecuación se cumple:

$$\begin{aligned} & -a * d * \sin(\theta_{(t)}) = 0 \text{ por ende } \sin(\theta_{(t)}) = 0 \\ & e * v(a+b) = 0 \text{ por ende } v = 0 \\ & f * \dot{\theta}_{(t)} * (a+b) = 0 \text{ por ende } \dot{\theta}_{(t)} = 0 \\ & -f * \dot{\phi}_{(t)} * (a+b) = 0 \text{ por ende } \dot{\phi}_{(t)} = 0 \end{aligned}$$

Si  $\dot{\theta}_{(t)} = 0$ , entonces  $\ddot{\theta}_{(t)} = 0$

$$\ddot{\phi}_{(t)} = \frac{-1}{ac-b^2}(-b * d * \text{sen}(\theta_{(t)})) + v * e(b+c) + f * \dot{\theta}_{(t)}(b+c) - f * \dot{\phi}_{(t)}(b+c) \quad (21)$$

En la ecuación se cumple

$$-b * d * \text{sen}(\theta_{(t)}) = 0 \text{ por ende } \text{sen}(\theta_{(t)}) = 0$$

$$v * e(b+c) = 0 \text{ por ende } v = 0$$

$$f * \dot{\theta}_{(t)}(b+c) = 0 \text{ por ende } \dot{\theta}_{(t)} = 0$$

$$-f * \dot{\phi}_{(t)}(b+c) = 0 \text{ por ende } \dot{\phi}_{(t)} = 0$$

Si  $\dot{\phi}_{(t)} = 0$ , entonces  $\ddot{\phi}_{(t)} = 0$

Al obtener estas ecuaciones se puede conformar un sistema en espacios de estados, este tipo de sistemas son ideales cuando el sistema tiene más de una salida o entrada, a continuación, de hace un cambio de variables, por lo cual se va a mostrar la equivalencia de algunas variables:

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\theta}_{(t)} \\ \dot{\phi}_{(t)} \\ \theta_{(t)} \\ \phi_{(t)} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\theta}_{(t)} \\ \dot{\phi}_{(t)} \end{pmatrix}$$

Después de establecer las variables de estado se forma la matriz, para representar el modelo del Kit Edumip.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{(a+b)*f}{-b^2+a*c} & \frac{(a+b)*f}{-b^2+a*c} & \frac{a*d}{-b^2+a*c} & 0 \\ \frac{(b+c)*f}{b^2-a*c} & \frac{(b+c)*f}{b^2-a*c} & \frac{b*d}{b^2-a*c} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{(a+b)*e}{-b^2+a*c} \\ \frac{(b+c)*e}{-b^2+a*c} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} [u]$$

## 5. RESULTADOS Y DISCUSIONES

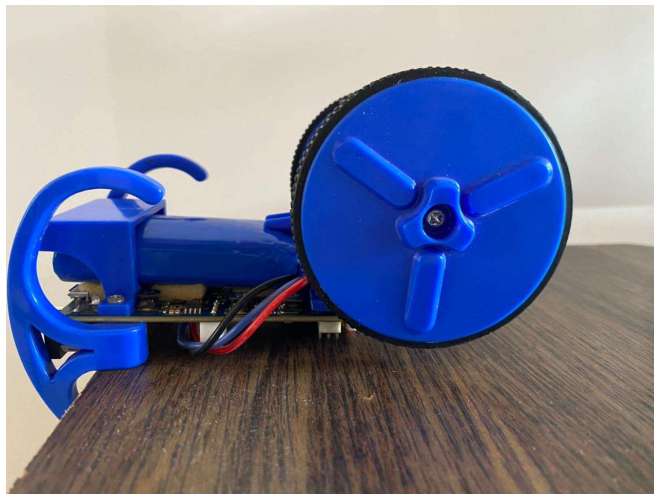
En la sección de cálculos y estimación del modelo se usan las ecuaciones de Lagrange para encontrar el modelo teórico del Edumip, pero es necesario realizar experimentos con el fin de encontrar los valores numéricos de las variables propias del sistema. Los experimentos permiten encontrar un modelo experimental para identificar el sistema, mediante la medición de las variables de interés del segway en función de sus entradas y salidas. Para el sistema de péndulo invertido se realizan dos experimentos, con el fin de realizar la identificación propiamente del modelo.

Para facilitar la identificación del modelo, los experimentos se ejecutan considerando restricciones que simplifiquen los resultados, en ellos se mide la velocidad angular del cuerpo y de las ruedas por separado usando una señal de prueba que contiene diferentes frecuencias para mejorar la precisión de los resultados.

### 5.1 EXPERIMENTO DE VELOCIDAD ANGULAR DE LAS RUEDAS.

Para este experimento, se posiciona sobre el suelo el Edumip de modo que las ruedas puedan girar de forma libre, como se observa en la Figura 7.

*Figura 7. Posición del robot, experimento de las ruedas*





Teniendo en cuenta la ecuación (21) y los valores de la Tabla 4.

$$\ddot{\Phi} = -\frac{(b+c)f\dot{\Theta}}{b^2-ac} + \frac{(b+c)f\dot{\Phi}}{b^2-ac} + \frac{bd\Theta}{b^2-ac} + \frac{(b+c)e}{-b^2+ac}\mu(t)$$

Con el cuerpo del Edumip acostado se tiene

$$\ddot{\Theta} = 0 \quad y \quad \dot{\Theta} = 0$$

Igualmente, las masas del cuerpo y las ruedas se consideran en “0” debido a que no hay movimiento del cuerpo y la masa no afecta el sistema por ende  $b = 0$ ,  $d = 0$  y  $a = 2Iw$

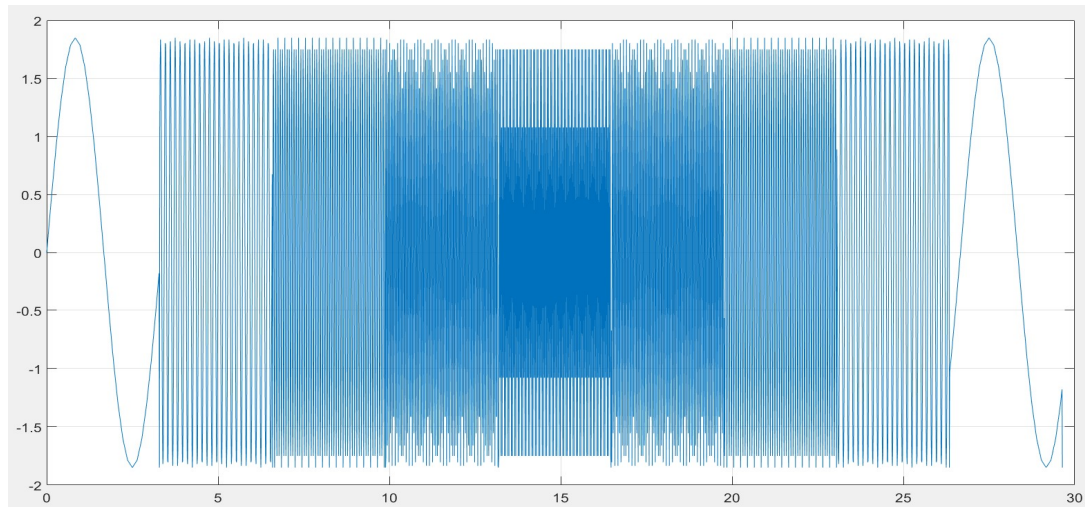
$$\ddot{\Phi} = -\frac{f\dot{\Phi}}{a} + \frac{e}{a}\mu(t)$$

De la ecuación anterior se obtiene la función de transferencia para la velocidad de las ruedas con relación al voltaje aplicado a los motores.

$$TF(s) = \frac{\frac{e}{a}}{s + \frac{f}{a}} \quad (22)$$

Por medio de MATLAB se ingresa una señal de prueba, que permita hallar la velocidad angular de las llantas, para hacer este experimento se crea una señal sinusoidal que aumenta su frecuencia en forma logarítmica, desde  $0.3Hz$  hasta  $30Hz$  y luego disminuye desde  $30Hz$  hasta  $0.3Hz$  con un voltaje pico de  $1.85V$ .

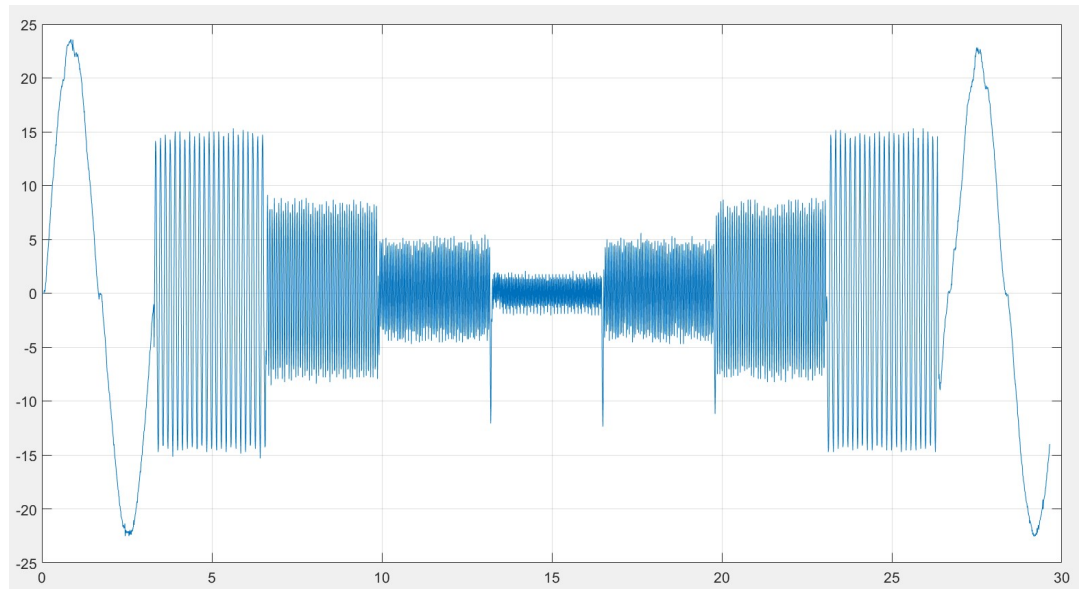
Grafica 1. Señal de Entrada experimento de las ruedas.



Cabe resaltar que esta señal sirve para hacer la identificación del modelo en el diagrama de Simulink, pero la amplitud no genera ningún efecto sobre los motores del sistema real, por lo que se debe incrementar en un factor que permita escalar la amplitud entre -100 a 100 siendo el rango de trabajo del módulo de MATLAB.

Para seguir con este experimento se ingresa al bloque de actuadores donde está la representación de los motores allí también se configura el sentido de rotación. La grafica 1, es la señal de prueba que se le ingresa al bloque de actuadores, por medio del bloque de encoders se mide el movimiento de las llantas, a partir del cual se puede encontrar la velocidad angular de las mismas ( $x_2(t)$ ) añadiendo un bloque derivador con respecto al tiempo.

*Gráfico 2. Señal de salida en función del tiempo.*



El comportamiento generado como se muestra en el Gráfico 2. Señal de salida en función del tiempo, proporciona los datos que, mediante el uso de la herramienta de identificación de MATLAB, permite encontrar la función de transferencia con iguales características a la que muestra en la ecuación (22).

$$TF(s) = \frac{373.2}{s + 58.19} \quad (23)$$

Para encontrar los valores de  $I_w$  y  $\bar{s}$  se deben sustituir los valores de la ecuación (22) y compararlos con la ecuación (23).

## 5.2 EXPERIMENTO DEL MOVIMIENTO DEL CUERPO.

En este experimento se procede a dejar las ruedas estáticas y se posiciona el cuerpo del robot en diferentes ángulos, como se observa en la siguiente imagen

*Figura 8. Posición del robot, experimento del cuerpo*



Si se restringe el movimiento de las ruedas en la ecuación (16)

$$\phi = 0, \quad \dot{\phi} = 0 \text{ y } \ddot{\phi} = 0$$

por lo tanto, la ecuación se transforma de la siguiente manera

$$d * \sin\theta(t) = e * v(t) + f * \dot{\theta}(t) + c * \ddot{\theta}(t)$$

$$\ddot{\theta}(t) = \frac{-d * \sin\theta(t)}{c} - \frac{f * \dot{\theta}(t)}{c} - \frac{e}{c} v(t)$$

Al posicionar el péndulo invertido de la forma presentada en la Figura 8, se alcanza el equilibrio sin necesidad de actuadores, en esta situación es fácil notar que se cumplen las siguientes condiciones:

$$\theta(t) = 0, \quad \dot{\theta}(t) = 0, \quad \ddot{\theta}(t) = 0, \quad v(t) = 0$$

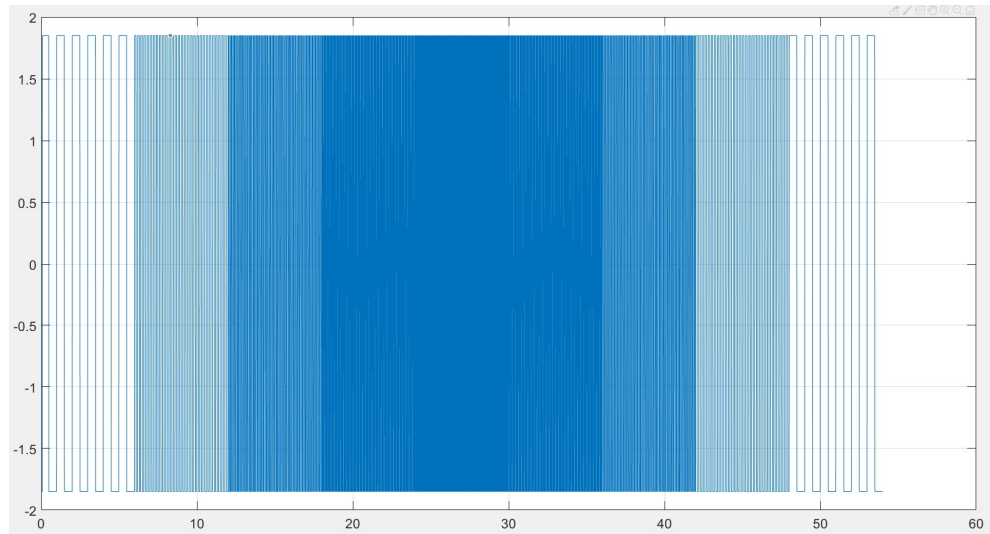
Por lo tanto, se puede encontrar la función de transferencia de la velocidad del cuerpo con respecto al voltaje aplicado a los motores:

$$\ddot{\theta}(t) = \frac{-d\theta(t)}{c} - \frac{f\dot{\theta}(t)}{c} - \frac{e}{c}\mu(t)$$

$$TF(s) = \frac{\frac{-e}{c}s}{s^2 + \frac{f}{c}s + \frac{d}{c}} \quad (24)$$

Para realizar este experimento, se debe ingresar un tren de pulsos que varía su frecuencia desde 1 Hz a 20 Hz, con una amplitud de  $\pm 1.85$  Voltios pico, e igualmente que el anterior se hace en una duración de 30 seg. A continuación, se muestra un gráfico de la señal en función del tiempo:

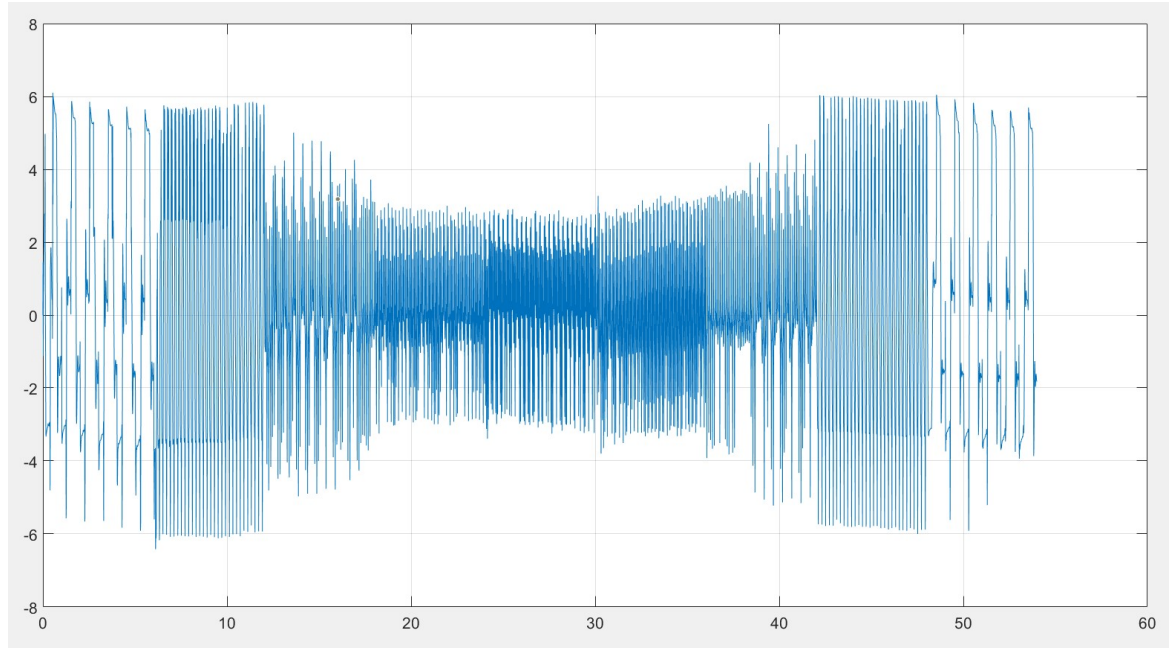
Gráfico 3. Señal de entrada para el experimento del cuerpo.



Este experimento emula el comportamiento real, de un péndulo invertido con la acción de control ya implementada, se ingresa una señal que hace que se balance, hacia al frente y hacia atrás. Después de ingresar la señal a los motores

por medio del sensor IMU se obtiene la velocidad del cuerpo ( $x_1(t)$ ), cabe recalcar que para este experimento también se debe multiplicar la señal de entrada por una ganancia que permita incrementar la amplitud, de tal forma que se pueda ingresar al bloque de los motores.

Gráfico 4. Señal de salida para el experimento del cuerpo.



El comportamiento generado como se muestra en el Gráfico 4. Señal de salida para el experimento del movimiento del cuerpo, proporciona los datos que, mediante el uso de la herramienta de identificación de MATLAB, permite encontrar la función de transferencia con iguales características a la que muestra en la ecuación (24).

A continuación, se tiene la función de transferencia que se obtuvo como resultado en MATLAB.

$$TF(s) = \frac{-12.33s + 9.378}{s^2 + 5.138s + 83.83} \quad (25)$$

$$TF(s) = \frac{-12.33s}{s^2 + 5.138s + 83.83} \quad (26)$$

En la ecuación (26) se realizó un ajuste al resultado obtenido en MATLAB, que consiste en eliminar el valor constante en el numerador, con esto se mueve el cero de 0.76 al origen y se logra un mejor ajuste a los datos.

Para encontrar los valores de  $k$  y  $I_B$  se deben sustituir los valores de la ecuación (24) y compararlos con la ecuación (26).

Al sustituir los valores numéricos de cada término en (22) y (24), comparando con (23) y (26) respectivamente, se obtiene el sistema de ecuaciones que permite encontrar los términos desconocidos de la Tabla 2.

$$I_B = \left( m_b * g * \frac{l}{\left(\frac{d}{c}\right)} \right) - (m_b * l^2)$$

$$k = \left( \frac{\frac{f}{c}}{2 * G_r^2} \right) * (I_B + m_b * l^2)$$

$$I_W = G_r^2 * \left( \frac{k}{\frac{f}{a}} \right)$$

$$\bar{s} = \left( \frac{e}{a} \right) * \left( \frac{V_{max} * I_W}{G_r} \right)$$

$$I_B = 7.65 * 10^{-4}$$

$$k = 2.24 * 10^{-6}$$

$$I_W = 4.88 * 10^{-5}$$

$$\bar{s} = 3.79 * 10^{-3}$$

Una vez encontrados los valores es posible calcular las variables de la Tabla 4.

$$a = 4.64 * 10^{-4}$$

$$b = 3.21 * 10^{-4}$$

$$c = 1.1 * 10^{-3}$$

$$d = 9.28 * 10^{-2}$$

$$e = 3.65 * 10^{-2}$$

$$f = 5.7 * 10^{-3}$$

Finalmente se calculan los valores de las ecuaciones de estado y con la ayuda de MATLAB se obtienen las correspondientes funciones de transferencia.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \dot{x}_4(t) \end{bmatrix} = [A] * \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} + [B] * u(t)$$

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = [C] * \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} + [D] * u(t)$$

Donde

$$A = \begin{bmatrix} -10.89 & 10.89 & 105.01 & 0 \\ -19.81 & 19.81 & 72.82 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -69.9 \\ 3.48 * 10^3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

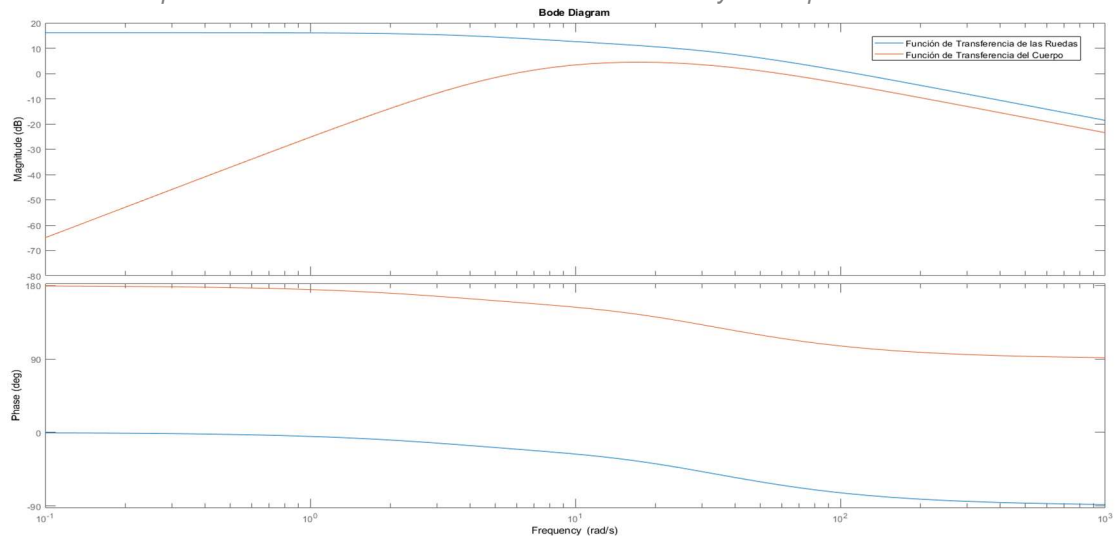
$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{Y(S)\dot{\theta}}{U(S)_V} = \frac{-67.24 s^2 - 4.487 * 10^{-13} s}{s^3 + 28.87 s^2 - 103.5 s - 1194}$$

$$\frac{Y(S)\dot{\phi}}{U(S)_V} = \frac{117.9 s^2 + 4.189 * 10^{-13} s - 7656}{s^3 + 28.87 s^2 - 103.5 s - 1194}$$

Para obtener estas funciones de transferencia se ha ignorado el estado  $x_4(t)$  ya que como se observa en las ecuaciones de estado, no tiene efecto sobre los demás estados.

Gráfico 5. Respuesta en Frecuencia del movimiento de las ruedas y el cuerpo.



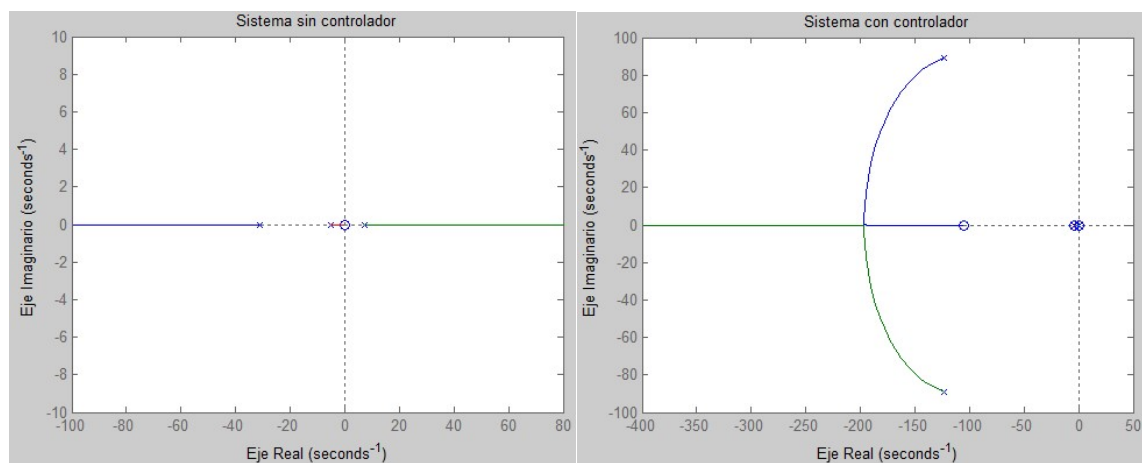
El Gráfico 5. Respuesta en Frecuencia del movimiento de las ruedas y el cuerpo, como su nombre lo indica presenta el comportamiento en frecuencia para los modelos de velocidad del movimiento de las ruedas y el cuerpo.

### 5.3 VALIDACIÓN DEL MODELO

En esta sección se pretende realizar una comparación entre el modelo matemático hallado y el sistema real, para ello se implementa una acción de control igual sobre la posición del cuerpo  $\theta(t)$  en ambos casos.

Con la ayuda de la herramienta PID Tuner de MATLAB, se encuentran los parámetros del controlador PID que permitan realizar el ajuste del sistema para que alcance la estabilidad en un punto de referencia. Los datos arrojados por la herramienta son:  $Kp = -362.6, Ti = 0.2468, Td = 00.9128$ .

Gráfico 6. Croquis del lugar geométrico de las raíces (LGR).



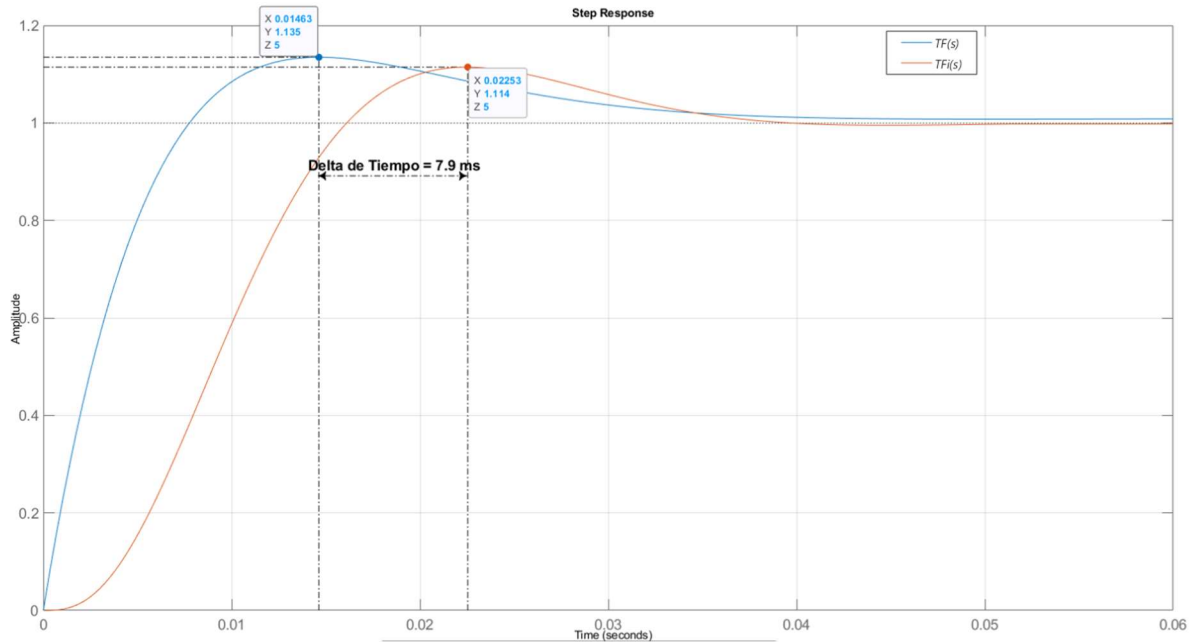
El Gráfico 6, muestra cómo el controlador actúa sobre la estabilidad del sistema eliminando el polo puramente real en el cuadrante positivo, ajustando un polo y un cero cerca al origen y generando el par de polos iguales opuestos con parte imaginaria.

Como se indica al inicio de esta sección, el controlador se implementa directamente sobre la BeagleBone, se toman los datos de la posición del cuerpo y el voltaje aplicado a los motores y con esos datos se realiza la identificación del sistema. De esta manera se obtiene:



$$TFi = \frac{1.565 * 10^7 s + 1.487 * 10^9}{s^4 + 695.6s^3 + 1.87 * 10^5 s^2 + 2.7 * 10^7 s + 1.48 * 10^9}$$

Gráfico 7. Respuesta ante un escalón de (TFs) y (TFi).



Los resultados se aprecian en el Gráfico 7. Respuesta ante un escalón de la función de transferencia del sistema Real ( $TFs$ ) y por identificación ( $TFi$ ), donde  $TFi$  tiene hace referencia a la función de transferencia obtenida por identificación a partir de los datos reales del sistema, mientras que  $TFs$  tiene es la función de transferencia simulada del modelo hallado mediante calculo e identificación.

La respuesta transitoria que presentan las curvas difiere por 7,9 ms en el tiempo para alcanzar el valor pico, pero al ser este un valor relativamente muy pequeño y teniendo en cuenta las formas de cada curva y los tiempos similares de estabilización obtenidos de ambos sistemas con acción de control es suficiente para concluir el éxito de los experimentos y la precisión del modelo encontrado, si se tiene en cuenta que en los pasos donde se toma información y se realiza identificación se añade un error debido a que no es posible encontrar un ajuste del 100% con los datos reales, por ejemplo, el modelo  $TFi$  tiene un ajuste del 89.98%.

## 6.CONCLUSIONES

Se comprende las prestaciones que tiene la BeagleBone para péndulos invertidos móviles, después de realizar las diferentes pruebas se analiza que está muy optimizada para cumplir con diferentes tareas por lo cual es rápida, tiene un tamaño compacto ideal para implementaciones con espacio reducido como se expresó en un apartado de este proyecto, tiene puertos especializados para el manejo de motores que es algo muy poco común en placas de desarrollo pero para este tipo de aplicaciones es muy versátil que en la misma placa base tenga un módulo en donde se pueda configurar motores sin necesidad de drivers adicionales.

De acuerdo con el sistema de identificación de MATLAB, se encuentra una función de transferencia que describe el comportamiento del Kit Edumip, la importancia de hallar esta función radica que sirve para encontrar parámetros que de manera practica son difíciles de calcular, como se expresa en los alcances de este proyecto se necesita encontrar todas las variables para obtener un modelo matemático de este sistema, al recopilar todos los parámetros físicos se obtuvo un modelo que representa en un alto porcentaje el comportamiento del Kit Edumip.

Durante el planteamiento de este proyecto se estableció que el fin de este trabajo de grado es utilizar toda esta investigación, y que se pueda convertir en un laboratorio que permita a los estudiantes de una manera teórica y práctica, aplicar metodologías de modelamiento de sistemas. Se documenta con detalle todos los pasos para encontrar el modelo del Kit Edumip, desde la configuración inicial de la placa hasta la obtención de la función de transferencia.

Se indaga sobre métodos alternativos que permitan simplificar los cálculos para hallar el modelo, por lo cual se decide utilizar las ecuaciones de Lagrange, se entiende que la mecánica de Newton trata con fuerzas que son magnitudes vectoriales, mientras, en la mecánica de Lagrange se trata con energías cinéticas y potenciales que son cantidades escalares, por lo que se facilitan en gran medida los cálculos. Se obtiene el modelo de este sistema con el uso de estas ecuaciones.

## 7.RECOMENDACIONES

Después de realizar múltiples pruebas, se debe tener en cuenta que los cambios de hardware en este tipo de sistema afectan de manera considerable a la dinámica del kit. El ejemplo en donde se observan claramente estas afectaciones son al ejecutar el código de **rc\_balance**, teniendo conectado el robot al cable de poder, en donde este le genera una tensión extra al Kit interrumpiendo su equilibrio.

Se plantea para futuras investigaciones que se diseñe un tipo de controlador que permita convertir el comportamiento inestable de este sistema en sistema estable, al desarrollar estos proyectos sirven para complementar la práctica de laboratorio que se planteó durante el desarrollo de esta Tesis. Además, sería muy interesante para temas de investigación, que se implementen diferentes sistemas de control con metodologías distintas, desde sistema de control digital a sistemas basados en control inteligente. Con todos estos diseños de controladores se puede crear una práctica muy completa que permita que el estudiante evalúe el rendimiento de todos estos controladores y de esta manera se pueda comparar el rendimiento.

Se recomienda que cuando se utilice este Kit Edumip se compruebe si los drivers están configurados de manera correcta, en los anexos se explica cómo se realiza de forma correcta dicha comprobación del estado de los controladores, si el estado de los drivers arroja **FALSE**, se deben restaurar los controladores.

Comprobar si se pueden obtener los parámetros, de distintas formas además de las consideradas en este trabajo de grado, esto puede servir para crear un punto de comparación para saber cuál manera es más eficiente para hallar estos parámetros, cabe recalcar que durante el desarrollo de esta investigación se trata de encontrar la mayor cantidad de parámetros de manera experimental, para obtener un modelo cercano al real.

Para futuros trabajos se debe tener cuidado con la batería del kit, en el caso de esta batería fue expuesta un periodo largo de uso, por lo cual comienza a inflarse, es de saberse que al incrementar el tamaño de la batería es una alerta de que su ciclo útil está llegando a su fin y a la vez se ve afectado en la estabilidad del robot, por lo cual se debió reemplazar para seguir con las pruebas.

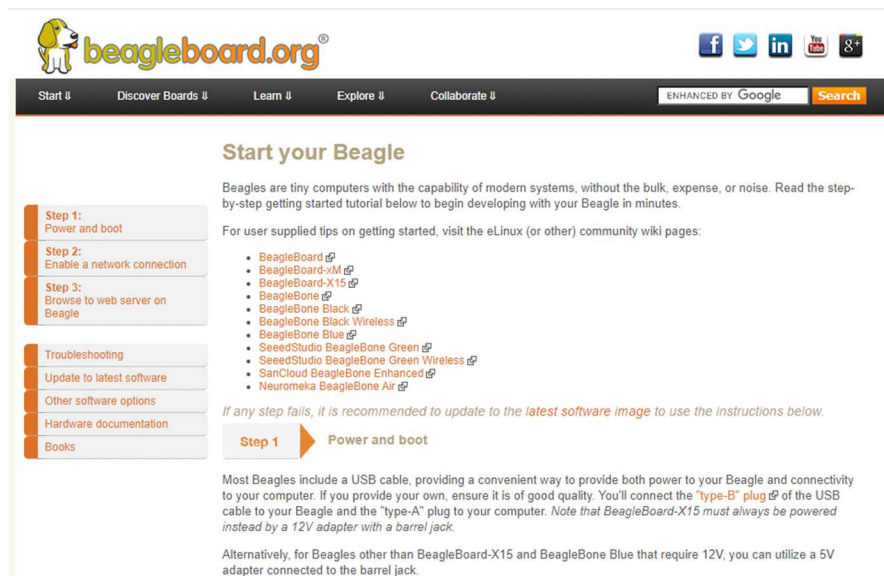
Inicialmente la batería que tenía el robot podía ser recargada directamente del cable de poder, pero al terminar su ciclo de uso, se compró una nueva batería en donde se recomienda tener un cargador de batería de tipo LiPo (Litio y polímero) para poder recargarla.

## ANEXOS

### ANEXO A. ACTIVACIÓN DEL EDUMIP

En la primera fase de este proyecto, antes de encender el dispositivo, como resultado de la investigación previa, se toma la determinación de comprobar si la imagen que está cargada en el equipo funciona correctamente, este tipo de pruebas se hacen basándose en comprobaciones que recomienda el fabricante en “Robot Control Library”<sup>16</sup> Según la página oficial al conectar el dispositivo por medio de un cable micro USB al ordenador, se puede acceder al sistema operativo que está cargado en el Kit Edumip, luego de que el sistema reconozca e instale los drivers necesarios para establecer la conexión. Al ingresar al explorador de archivos de Windows, se observa que se crea un acceso similar como si se fuera acceder al almacenamiento de un disco duro, en donde se encuentran diferentes carpetas que almacenan componentes necesarios para ejecutar las páginas web que permiten establecer conexión, descargas drivers, conocer componentes acerca de la tarjeta BeagleBone blue, en la siguiente imagen se muestra una captura:

Figura 9 Captura de Pantalla de la página start.html





<sup>16</sup> Robot Control Library , Updating beagleBone Image. [Consultado:20 de marzo de 2021]. <http://strawsondesign.com/docs/librobotcontrol/flashing.html>

Por medio de esta página, se puede acceder a localhost, que redirecciona a otra página en donde se encuentran todas las librerías, conexiones de los servidores que permiten acceder al sistema operativo del Kit, ejemplos para comprobar el funcionamiento de leds, motores, puertos GPIO (Entrada/Salida de Propósito General), puerto UART (Transmisor-Receptor Asíncrono Universal), pulsadores, entre otros.

En la siguiente imagen, se muestra el diagrama de conexiones que tiene el Kit Edumip. Las conexiones que tienen el status activo hacen referencia a las habilitadas por el medio que se establece la conexión, por el momento el enlace se hace por medio de un cable de Ethernet.

*Figura 10 Diagrama de Conexiones del Kit*

IP Address	Connection Type	Operating System(s)	Status
192.168.7.2	USB	Windows	Active 
192.168.6.2	USB	Mac OS X, Linux	Inactive
192.168.8.1	WiFi	all	Inactive
beaglebone.local	all	mDNS enabled	Active 
beaglebone-2.local	all	mDNS enabled	Inactive

Al ingresar al enlace que se encuentra en la columna status, se remite a una página en donde se puede verificar la conexión por medio de LAN, además se puede conocer la dirección IP. Para comprobar que todo este funcionamiento debe aparecer en el cabecero de la página HTML un mensaje de confirmación en forma de alerta emergente después de ejecutar una comprobación del medio de conexión, al mostrarse este tipo de mensaje se puede acceder a las opciones mencionadas anteriormente, a continuación, se muestra la alerta que se debe arrojar para verificar la correcta conexión entre ambos terminales.

Figura 11. Alertas del enlace del Diagrama de Conexiones.

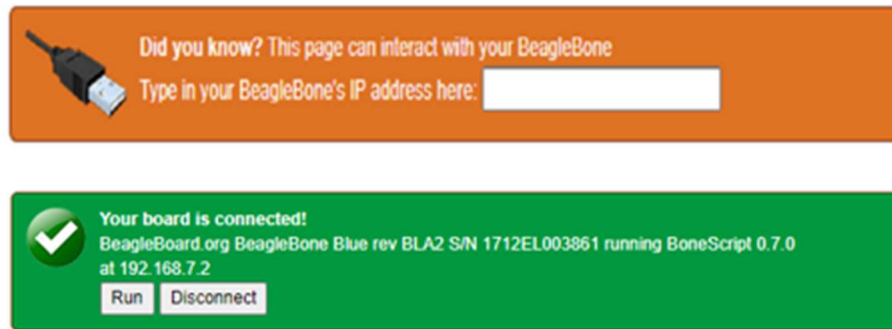
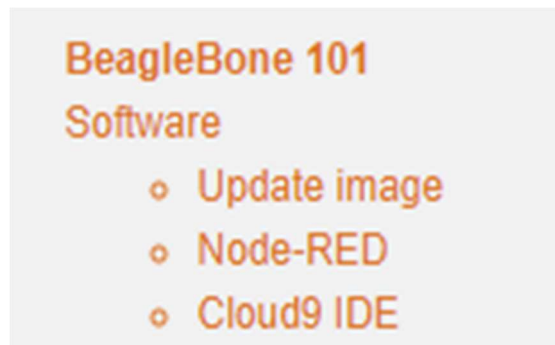
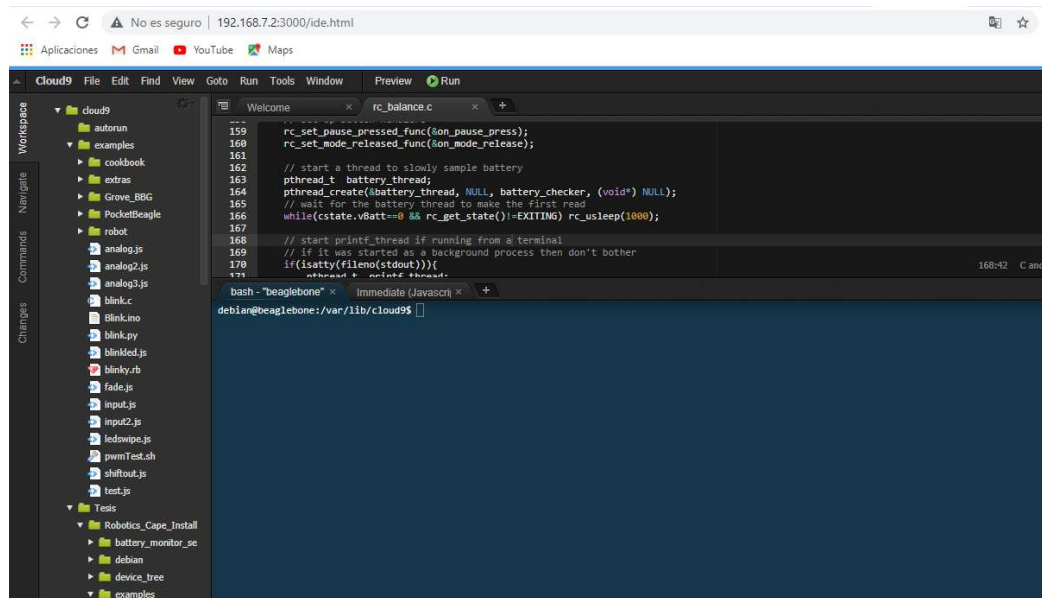


Figura 12. Menú de opciones de Software para la conexión con el Kit Edumip



Después de verificar que todo esté funcionando de manera correcta se procede buscar las rutas que permitan acceder al software del kit Edumip, al costado de la página se encuentra diferentes opciones de conexión, la que configura de una manera más dinámica e intuitiva es el entorno Cloud9, al presionar el enlace de **cloud9 IDE** se redirecciona a una página en donde genera un entorno con una terminal, se puede observar en la Figura 13.

Figura 13. Entorno CCloud9 para conexiones LAN



Este es el link que se puede utilizar para acceder a la plataforma Cloud9, por medio de una conexión LAN, si no se desea realizar todo el proceso anterior para futuras implementaciones se puede hacer uso de este link, para que de manera directa se puede remitir a la misma ruta, e igualmente se pueda acceder al IDE Cloud9 ingresando esta HTML en el navegador '192.168.7.2:3000/ide.html'

Este IDE permite hacer una conexión directamente con la terminal del sistema operativo del Kit Edumip. Después de tener el acceso a esta plataforma se necesita conocer como acceder a la configuración del sistema, como anteriormente se manejó sistemas basados en distribuciones Linux se conoce algunos comandos básicos, para configurar el kit de manera correcta seguimos las instrucciones del video "BeagleBone Blue | Getting Started", el video abarca la configuración básica para habilitar la red Wi-Fi. Para habilitar el Wi-Fi, se modifica la configuración que trae por defecto y establece una conexión inalámbrica, se hace uso de la interfaz **Connmanctl**<sup>17</sup>, que permite establecer la conexión.

Al establecer la conexión Wi-Fi, como no se sabe si el Kit Edumip tiene instalados los paquetes más actualizados, por ende se dispone por medio de la terminal a actualizar todos los componentes del sistema operativo, para actualizar componentes propios del sistema, se hacen uso del comando **sudo apt-**

<sup>17</sup> Archlinux . [Consultado:20 de marzo de 2021]. <https://man.archlinux.org/man/connmanctl.1>



**get update** y **sudo apt-get upgrade**<sup>18</sup>, cada uno tiene una función en particular pero se debe hacer uso en el orden descrito, el primero refresca la lista de las versiones más recientes y busca los paquetes que necesiten las actualizaciones, el segundo es el encargado de actualizar los paquetes. Al ejecutar ambos comandos se asegura que se tenga las versiones más recientes de todos los controladores y paquetes, después se verifica que la librería principal **librobotcontroel**<sup>19</sup> se encuentre actualizada pero para tener certeza se actualiza por medio del siguiente comando, **sudo apt update && sudo apt upgrade librobotcontrol**, al finalizar esta instalación se debe comprobar que todo este instalado correctamente, el fabricante sugiere ejecutar una línea de código que realiza una evaluación de todo el sistema con respecto a la librería antes instalada, en conclusión cuando se ejecuta esta línea arroja si todos los drivers y configuraciones están en orden para que los periféricos tales como motores, encoders, indicadores, distintos puertos tenga un enlace establecido que se pueda controlar por medio de un lenguaje de programación. Se ejecuta la siguiente línea **rc\_test\_drivers**, a continuación, se muestra el resultado:

*Figura 14. Comprobación Librería "librobotcontroel"*

```

debian@beaglebone:~$ rc_test_drivers
Kernel: 4.14.54-ti-r63
BeagleBoard.org Debian Image 2018-07-15
Debian: 9.5
PASSED: gpio 0
PASSED: gpio 1
PASSED: gpio 2
PASSED: gpio 3
PASSED: pwm1
PASSED: pwm2
PASSED: eqep0
PASSED: eqep1
PASSED: eqep2
FAILED: pru-rproc
PASSED: uart1
PASSED: uart2
PASSED: uart4
PASSED: uart5
PASSED: i2c1
PASSED: i2c2
PASSED: spi
PASSED: LED
FAILED: ADC iio
Currently running on a:
MODEL_BB_BLUE
Robot Control library Version:
1.0.0

```

<sup>18</sup> Linuxhispano [Consultado:20 de marzo de 2021].

<https://www.linuxhispano.net/2013/05/03/diferencia-entre-apt-get-update-y-apt-get-upgrade/>

<sup>19</sup>Github de la librería . [Consultado:20 de marzo de 2021].

[https://github.com/h2mille/Robotics\\_Cape\\_Installer](https://github.com/h2mille/Robotics_Cape_Installer)

En la figura se puede ver claramente que dos componentes fallan, los cuales son el **pru-rproc** y **ADC iio**, según el fabricante el estado FAILED de ambos componentes da entender que hay un mal funcionamiento en la BeagleBone, por lo que recomienda que se redireccione a la página principal de soporte donde se encuentra una imagen oficial que permite volver a cargar nuevamente al sistema.

*Figura 15. Manejo de Error*

Any image after 7-15-2018 should pass all tests. If this test indicates that the PRU and ADC are malfunctioning then the bootloader need to be updated by flashing the built-in eMMC storage as described in Updating BeagleBone Image section.

Para corregir este error se descarga una nueva imagen del sistema, al descargar el archivo se debe cargar al medio SD con el programa Etcher o el programa de su preferencia pero en este caso se hace según las recomendaciones del fabricante, después de que este medio se encuentre preparado, se debe insertar en el Kit Edumip, luego de tener insertado la memoria se debe conectar el Jack de Alimentación, o el cable USB para encender el dispositivo y comenzar a instalar todo el sistema operativo, después de insertar la memoria se debe oprimir el botón que tiene nombre SD, este habilita el puerto, para comprobar que este corriendo el programa de instalación los indicadores Leds deben comenzar hacer una secuencia muy similar al comportamiento de un juego llamado pong<sup>20</sup>, el fabricante lo explica de este manera pero lo que se quiere dar entender es que los Leds se encienden uno tras el otro de manera descendente, y luego se vuelven a encender desde el ultimo hasta el primero, como es similar al juego el fabricante lo explica de esa manera.

Al terminar la instalación de todos los paquetes, se conecta a la plataforma Cloud9 y se debe volver a correr ejecutar el comando, para volver a correr el comando **rc\_test\_drivers** para confirmar, que todos los drivers y configuraciones estén funcionando de manera correcta, a continuación, se muestra la respuesta al ejecutar este comando.

---

<sup>20</sup> PONG. [Consultado:20 de marzo de 2021]. <https://es.wikipedia.org/wiki/Pong>

Figura 16. Prueba de drivers Kit Edumip

```
debian@beaglebone:/var/lib/cloud9/Tesis/Robotics_Cape_Installer/examples$
re_test_drivers

Kernel: 4.14.71-ti-r80
BeagleBoard.org Debian Image 2018-10-07
Debian: 9.5

PASSED: gpio 0
PASSED: gpio 1
PASSED: gpio 2
PASSED: gpio 3
PASSED: pwm0
PASSED: pwm1
PASSED: pwm2
PASSED: eqep0
PASSED: eqep1
PASSED: eqep2
FAILED: pru-rpud
PASSED: uart1
PASSED: uart2
PASSED: uart4
PASSED: uart5
PASSED: i2c1
PASSED: i2c2
PASSED: spi
PASSED: LED
FAILED: ADC iio

Currently running on a:
MODEL_BB_BLUE
Robot Control library Version:
1.0.3
```

Después de terminar de configurar todo los aspectos básicos para que el Kit Edumip funcione de manera correcta, se continua con la librería antes instalada, pero antes de seguir, se aclara que el kit Edumip está conformado por dos tipos de elementos; elementos activos como motores, encoders, y elementos pasivos que son las diferentes partes del chasis, como se debe manipular todo el comportamiento de los elementos activos por medio de código, se deben hacer calibraciones de los componentes que se conectaron a la tarjeta para asegurar que reciban e emitan las señales necesarias teniendo un funcionamiento correcto. La dinámica del sistema es la de un péndulo invertido, como se evidencia en teorías de control este tipo de sistemas son naturalmente inestables, en la vida practica se puede comprobar la teoría, para llegar a una aproximación al estado estable se debe aplicar algún tipo de control que permita balancear el ángulo perpendicular a la superficie que se encuentra el sistema, para lograr esto se debe aplicar fuerzas en sentido contrarios en instantes cortos, logrando el equilibrio del sistema.

Para este caso, el Kit Edumip controla la inclinación con respecto al eje de referencia con la rotación de sus ruedas en sentido contrario, pero con la misma magnitud, de esta manera se mantiene en un estado de equilibrio.

Como se explicó en el párrafo anterior este sistema debe equilibrar el ángulo que se forma entre el cuerpo del robot con respecto el eje ortogonal a la superficie de

apoyo, durante esta investigación se decidió representarlo con el símbolo  $\theta$  (Theta), como se ha mencionado este ángulo para estar en el rango de equilibrio depende de las variaciones en las ruedas, para tener una relación más definida se determina que el ángulo theta, dependa de otro ángulo que está en función de la rotación de las ruedas, por lo cual dependiendo de la variación de este ángulo se puede controlar el valor de Theta, a este ángulo se decide llamarlo  $\Phi$  (Phi), más adelante se va hablar acerca del funcionamiento de cada uno de estos ángulos para crear un sistema de control, para lograr la estabilidad del sistema.

Al entender la importancia de estos ángulos para el comportamiento del sistema, se calibran los encoders que son dispositivos que permiten determinar la frecuencia en la que giran las ruedas del dispositivo, y de esta manera por medio de una relación se puede determinar el valor de Phi, de igual manera se debe configurar de manera correcta el IMU que es el encargado entre sus múltiples funciones de determinar el ángulo Theta.

Siguiendo con la exploración de la librería del robot, se continua con la carpeta llamada Ejemplos, donde hay diferentes códigos que permiten la calibración de múltiples periféricos, a continuación, se muestra los ejemplos que contiene esta librería:

```
1.  debian@beaglebone: ~$ cd
    /var/lib/cloud9/Tesis/Robotics_Cape_Installer/examples
2.  debian@beaglebone:/var/lib/cloud9/Tesis/Robotics_Cape_Installer/example
    s$ ls
3.  Makefile          rc_calibrate_escs rc_dsm_passthrough rc_test_buttons
    rc_test_filters  rc_test_vector
4.  rc_balance         rc_calibrate_gyro rc_kill             rc_test_cape
    rc_test_imu       rc_uart_loopback
5.  rc_benchmark_algebra rc_calibrate_mag  rc_spi_loopback    rc_test_dmp
    rc_test_motors    rc_version
6.  rc_bind_dsm        rc_check_battery  rc_test_adc         rc_test_drivers
    rc_test_polynomial robotics.mk
7.  rc_blink           rc_check_model    rc_test_algebra     rc_test_dsm
    rc_test_servos
8.  rc_calibrate_dsm    rc_cpu_freq       rc_test_barometer   rc_test_encoders
    rc_test_time
```

Cada uno de estos ejemplos, tiene una función de calibración, para comprender de una manera explícita el fabricante le agrega al nombre de los archivos de

calibración la palabra “*calibrate*”, para los códigos que en su nombre tiene la palabra “*test*”, son códigos que permiten probar el funcionamiento de ciertas partes del Kit Edumip. El fabricante recomienda ejecutar las calibraciones de primero, después se pasa a comprobar el funcionamiento por medio de los Test, los demás códigos que en su nombre no tiene ninguno de los identificadores, son códigos que permiten hacer funciones específicas del robot, el ejemplo que tiene más importancia para realizar este proyecto es el código **rc\_balance**, que contiene todo lo necesario para que el robot funcione de manera correcta como un péndulo invertido, en el código esta condensado todo un sistema de control, cabe resaltar que todo este código fue escrito en C, tiene diversas funciones para recrear el modelo del Kit, además también genera un controlador, el cual es necesario para que este sistema pueda ser capaz de sostenerse de manera perpendicular con respecto a la superficie en donde se encuentra.

Durante todo el proyecto se resalta que el funcionamiento físico se desea controlar por medio de código, por este motivo es de vital importancia calibrar todos los elementos activos. Para lograr calibrar, lo primero que se hace es corroborar el funcionamiento de los motores por medio del código **rc\_test\_motors**, este código consiste en establecer un valor de velocidad, y por medio de los encoders se mide si en realidad se está alcanzando la velocidad que antes se ha establecido, y en caso contrario, si no genera la velocidad este sistema cuenta con un código que genera una prueba interna para conocer el estado de los drivers, a continuación, se muestra la respuesta de esta prueba:

```
debian@beaglebone:/var/lib/cloud9/librobotcontrol/examples/src$ sudo rc_test_encoders

Raw encoder positions
  E1 |      E2 |      E3 |      E4 |
   0 |      0 |    721 |      0 |
```

En este caso para ajustar que los motores se estén moviendo de la manera correcta, y además que tengan la velocidad necesaria para que el Kit pueda estabilizarse, se debe comprobar los datos que arroja el IMU, son importantes para controlar la inclinación del Kit Edumip, e igualmente se debe comprobar que los encoders estén midiendo la velocidad de las llantas, porque es una variable fundamental para determinar el ángulo  $\phi$ , estas comprobaciones y calibraciones se deben hacer antes de ejecutar el código **rc\_balance**. Se procede a ejecutar los códigos correspondientes, para culminar con las calibraciones necesarias para operar el Kit Edumip. El código **rc\_balance** sirve para tener una noción del

funcionamiento esperado, este algoritmo tiene una lista de parámetros, estos datos son obtenidos por medio del fabricante, conociendo estas variables se puede hallar la función de transferencia, como el comportamiento de este sistema es inestable por naturaleza, debe tener un sistema de control para que se vuelva estable, por lo cual también el algoritmo tiene un sistema de control.

El objetivo de este trabajo de grado es poder determinar el modelo del sistema obteniendo todos los parámetros. Al revisar el modelo teórico, se entiende que algunos parámetros no tiene una forma sencilla de determinar su valor, por lo que se debe determinar a manera de pruebas experimentales, por este motivo se decide analizar este código, para que de manera similar se pueda implementar por medio del software **MATLAB**, esto se puede realizar mediante **Simulink**, por medio de la librería **beagleBone Blue Support from Simulink Coder**<sup>21</sup>, diseñada con el único fin de implementar por medio de bloques, el funcionamiento de las diferentes partes del Kit. Debido a la potencia del software antes mencionado se puede analizar de una manera precisa cada una de las variaciones, que se producen en todo el sistema. Luego de instalar esta extensión, se procede a conectar este dispositivo de manera a similar como si se conectara a un entorno de desarrollo integrado **ide** Cloud 9, todo el proceso de conectar la placa con el ordenador se hace de una manera intuitiva, después de que la conexión se establezca, se debe buscar en la biblioteca de Simulink donde están depositados todos los componentes distribuidos en distintas categorías en función a su utilidad.

Como antes se ha mencionado, a partir de esta etapa del proyecto se va a seguir trabajando con el programa **MATLAB**, a continuación, se explica cómo se configura el entorno de Simulink. La librería que se ha diseñado para trabajar con el Kit es muy completa y permite manejar todo el dispositivo por medio de esta, por lo cual se explica a detalle cómo se configura, y como es un entorno de programación gráfico, se facilitan algunas configuraciones de igual manera una de las ventajas de utilizar este software con respecto a otros, por que se diseñó entre sus múltiples funciones para modelar e implementar controladores, por lo que es un sistema eficiente, y que provee de diferentes herramientas para el análisis, la comprensión de la dinámica de los sistemas, entre otros. Por lo que es muy apto para desarrollar esta aplicación.

---

<sup>21</sup> Marhworks [Consultado:20 de marzo de 2021].

[https://la.mathworks.com/hardware-support/beaglebone-blue.html?fbclid=IwAR1hoOsFXML5E0sWKKYWnT3n\\_ofzS6EldOZ5LbYpkWkyKDFZ2bv2MpFc4to](https://la.mathworks.com/hardware-support/beaglebone-blue.html?fbclid=IwAR1hoOsFXML5E0sWKKYWnT3n_ofzS6EldOZ5LbYpkWkyKDFZ2bv2MpFc4to)

A continuación, se muestra una captura de la librería, todo está organizado por medio de categorías. Cada una de las categorías se encuentra condensado en bloques que representan las diferentes partes que componen el kit.

Figura 17. Librería de Simulink diseñada para la Tarjeta BeagleBone Blue

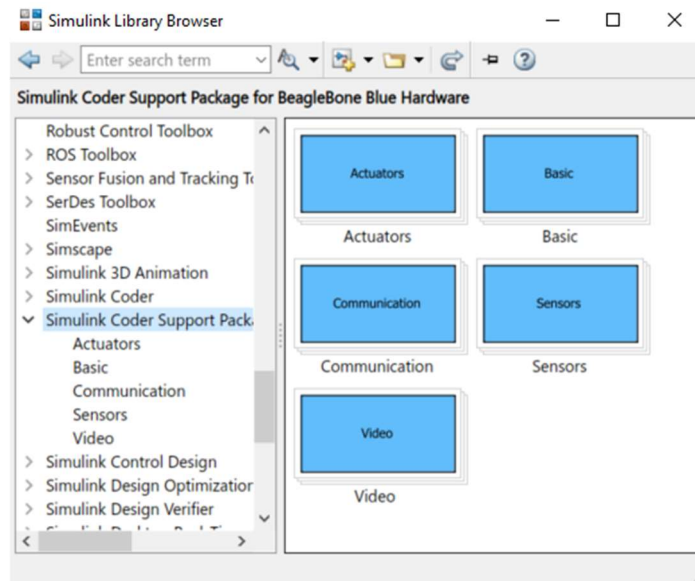


Figura 18. Librería para el Kit Edumip

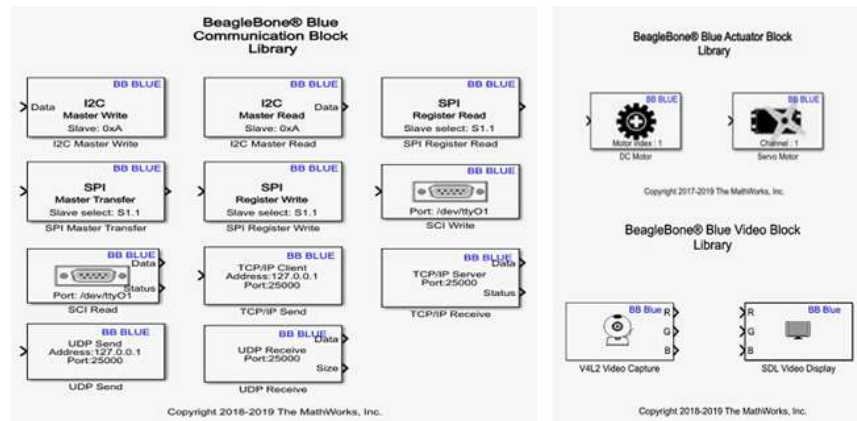
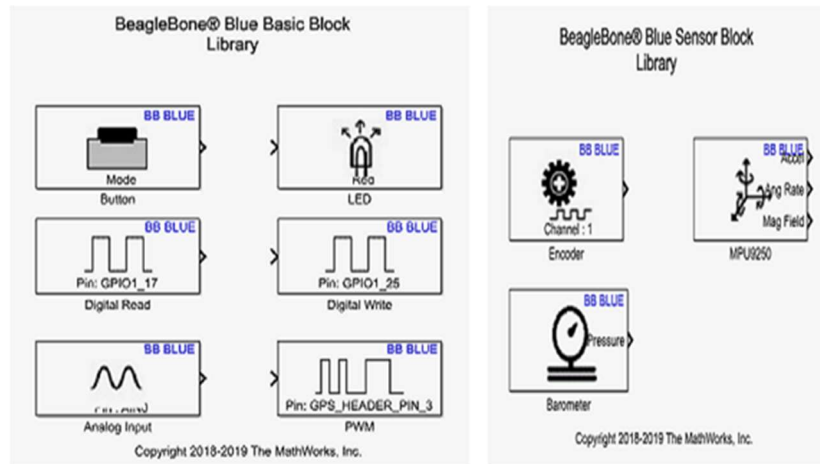


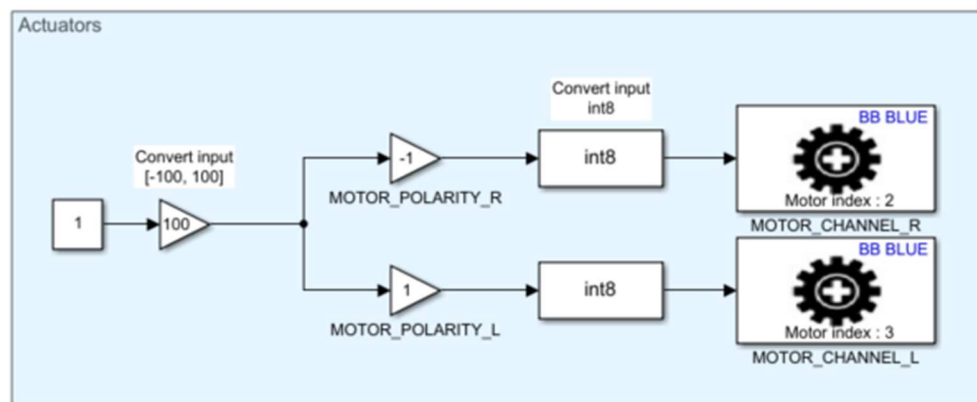
Figura 19. Librería de Simulink para el kit Edumip.



Antes de comenzar a utilizar la librería se debe configurar a qué puerto está conectado la tarjeta, después de garantizar la conexión comenzamos probando los actuadores nos dirigimos al apartado de actuadores de la librería, en donde se representan los motores por medio de bloques, se tiene en cuenta que se debe especificar a qué canal de la tarjeta se tiene conectado los motores, la tarjeta tiene cuatro puertos especializados para motores, al conocer en qué puerto se tiene conectado ambos actuadores se puede configurar en los respectivos bloques, para establecer una velocidad al motor se debe ingresar un valor que este en el rango de -100 a 100, la velocidad de motor es de 0 a 100, cuando se le ingresa valores negativos se modifica la dirección a la cual se está girando las ruedas.

A continuación, se muestra el esquema, para controlar los motores, además cabe mencionar que los motores deben girar en diferentes direcciones, pero con igual magnitud, para que de esta manera se estabilice el robot.

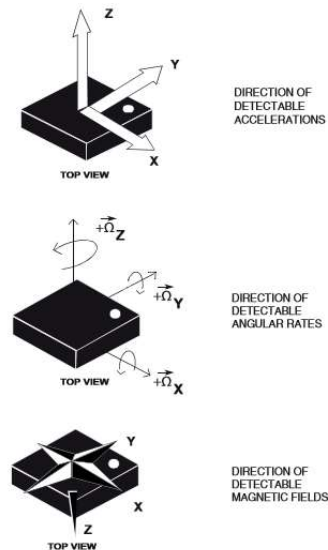
Figura 20. Bloque de actuadores





Después de establecer los valores de los bloques, se compila el código, una vez cargado el código al Kit Edumip, se mueven en diferentes direcciones las ruedas del kit, aunque se puede establecer para que se muevan en la misma dirección, luego de comprobar que se está ejecutando de manera correcta los bloques de los actuadores, se procede a configurar los bloques para medir la inclinación, rotación y aceleración, esta información se puede obtener por medio del sensor IMU que tiene incorporado el Kit. El sensor al cual se hace referencia es el IMU 9250, este chip tiene 9 grados de libertad, por lo que permite medir cada una de las variables según los tres ejes de referencia correspondientes, Figura 21, por lo cual permite medir aceleración, giroscopio, magnetómetro en los tres ejes, esto permite obtener mayor precisión.

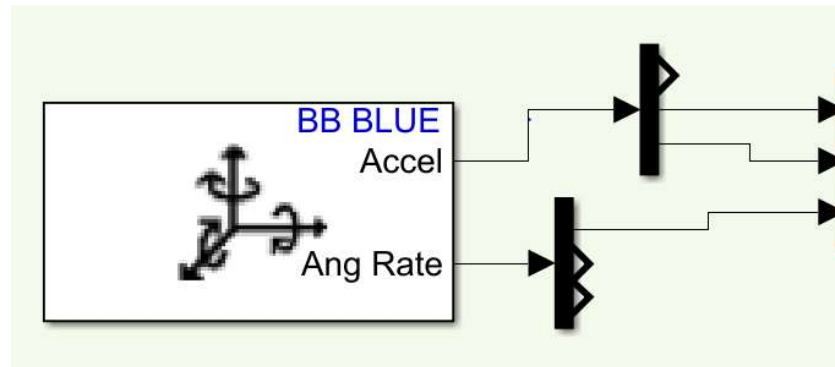
Figura 21. Ejes de Referencia



En MATLAB para representar todo el funcionamiento de este sensor, se hace mediante un bloque con tres salidas, de cada una de estas se obtiene una matriz 3 x 1 y se 3 señales de salida distintas que representan la misma magnitud, pero en ejes distintos. Como no se hace uso de todas estas señales, se debe seleccionar cuales sirven para obtener el ángulo Theta. Para encontrar este ángulo se necesita la aceleración en el eje Y, en el eje Z, porque es una componente entre estos ejes, se puede observar que el robot indica cuales son los ejes según la configuración de su IMU por un pequeño dibujo en la placa, al saber esto nos queda claro porque no se necesita la aceleración del eje X, pero de igual manera en el caso del giroscopio sucede el caso contrario ahora no necesitamos ni el eje Z, ni tampoco el eje Y, pero se necesita la medida del giroscopio en el eje X,

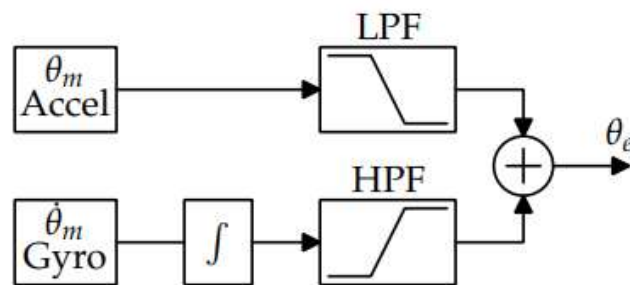
porque sobre este eje se produce la variación más significativa con respecto al movimiento.

Figura 22. Sensor de medición IMU 9250



Por medio de un DEMUX se separan las señales, después se ingresan a un filtro complementario, en este caso se hace uso de este filtro porque la medida que arroja el IMU en el acelerómetro tiene pequeñas inestabilidades, pero no se desplaza en posición, algo similar sucede con el giroscopio, el giroscopio arroja un valor muy preciso, pero en cambio al anterior si tiende a desviarse, aunque hay mejores alternativas para obtener mejor medida, pero también tiene mayor dificultad para implementarse en cuestiones de cálculos matemáticos. Cabe resaltar que además de corregir las medidas de las señales, también permite obtener el valor del ángulo de inclinación, en esta investigación este ángulo se le conoce como theta.

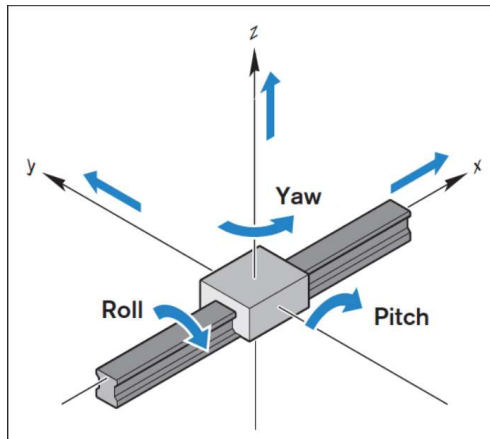
Figura 23. Filtro complementario



En la figura anterior se muestra un esquema de la composición de un filtro complementario, todo este sistema se debe implementar en MATLAB para conseguir una función de transferencia en función del ángulo Theta. Para construir este filtro, se debe construir en función de las variables, pero con un cambio en el sistema de referencia para la aceleración y en el caso de giroscopio se debe

cambiar de ángulos a radianes. Para cambiar el sistema de referencia a un sistema de rotaciones angulares, en este sistema de referencia se cuenta con tres diferentes movimientos cada uno de estos son combinaciones de 2 ejes del eje cartesiano, a continuación, se muestra una imagen para dar más claridad.

Figura 24. Sistema de rotaciones angulares



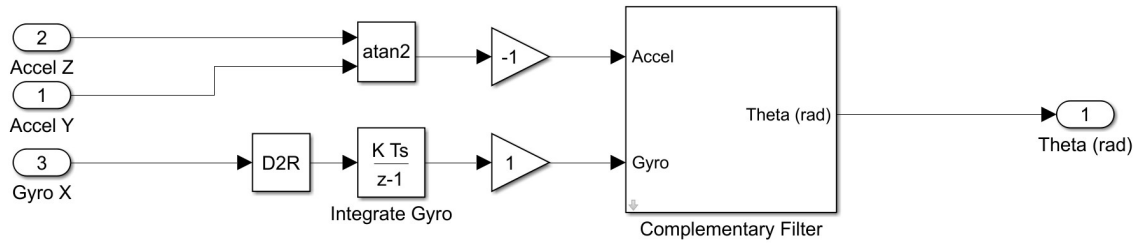
El movimiento que se necesita en este caso es el pitch, porque es el que hace referencia para encontrar el ángulo de inclinación, para lograr el cambio de referencia por medio de la combinación de las aceleraciones se puede hallar el pitch, este sistema equivale a la rotación que se produce entorno al eje Y, esta terminología es muy utilizado en aviación en donde se utiliza sistemas de rotaciones angulares<sup>22</sup> para describir los movimientos de la aeronave.

$$pitch = atan2(accY, accZ) + \pi$$

Debido que lo importante en este sistema es poder controlar la inclinación del cuerpo por este motivo se elige el movimiento pitch, a continuación, en la imagen se muestra la composición del filtro complementario, pero todo implementado en bloques en Simulink:

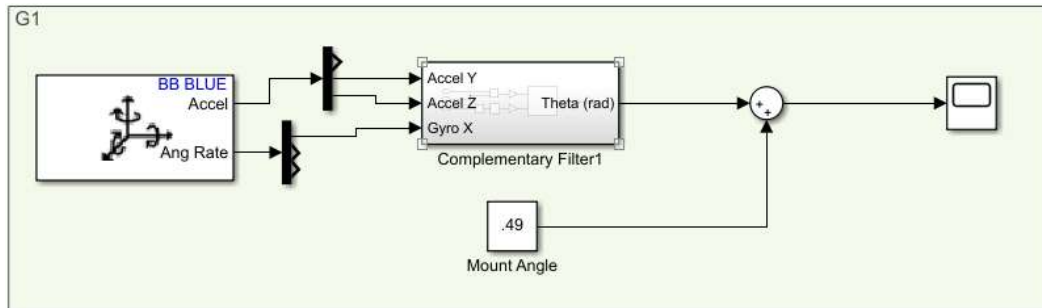
<sup>22</sup> Unidad de Medida Inercial. Algoritmo de Estimación e Implementación Software. [Consultado:20 de marzo de 2021]. [http://bibing.us.es/proyectos/abreproy/11253/fichero/memoria%252F02\\_capitulo2.pdf](http://bibing.us.es/proyectos/abreproy/11253/fichero/memoria%252F02_capitulo2.pdf)

Figura 25. bloque de la composición del filtro complementario



Después de la etapa del filtro complementario, al obtener el ángulo de inclinación, se le debe adicionar una constante de valor 0.49 radianes, este valor en particular se elige para modificar el valor mínimo que se obtiene en la medición del ángulo theta con el filtro complementario, por lo cual si el sistema está en equilibrio esta medida va a ser igual a 0 radianes, si se inclina hacia adelante va a tomar valores negativos y si se acuesta el robot toma valores positivos.

Figura26. Bloque del IMU para obtener theta



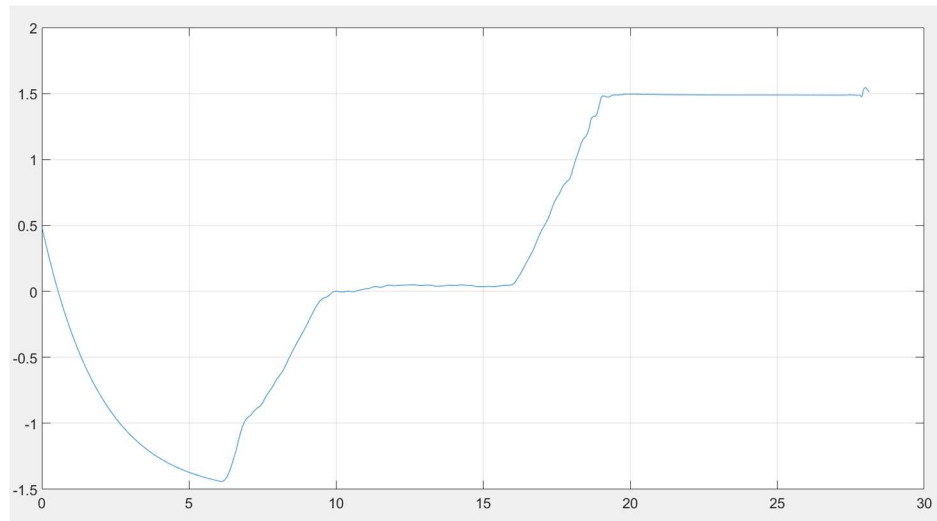
Este IMU MPU-9250 tiene 9 grados de libertad, los grados de libertad (GDL) denomina cada movimiento independiente que es capaz de realizar una articulación de un robot, en proyectos donde se requiere medir aceleración es muy útil, también se puede comprobar si el robot está subiendo por una pendiente o si un drone está girando o si un sistema de control esta experimentado algún tipo de vibración, además este sensor tiene una **resolución de de salida de 16Bit (15µT/LSB)**, si requiere precisión este sensor puede ser una gran opción, se puede trabajar con Arduino, Raspberry o sistemas similares.

Para acceder a los datos que miden los tres ejes del IMU, se debe seleccionar el modo de operación, en este caso tiene dos modos de operación. La primera es DMP, y la otra es la RANDOM, la diferencia entre estos dos modos de operación radica, que uno permite obtener hacer una realimentación interna para generar correcciones si los datos adquiridos tienen errores, e igualmente se intenta calibrar

para corregir los datos, este modo en particular no se pudo activar para este sensor, porque generaba un error en MATLAB, indagando sobre este fallo se descubrió que MATLAB pensaba que se estaba conectando otro periférico y no soporta esta carga, por lo que se decide trabajar con el modo RANDOM que igualmente sus datos son confiables, solo se requiere hacer calibraciones para mejorar la lectura del sensor.

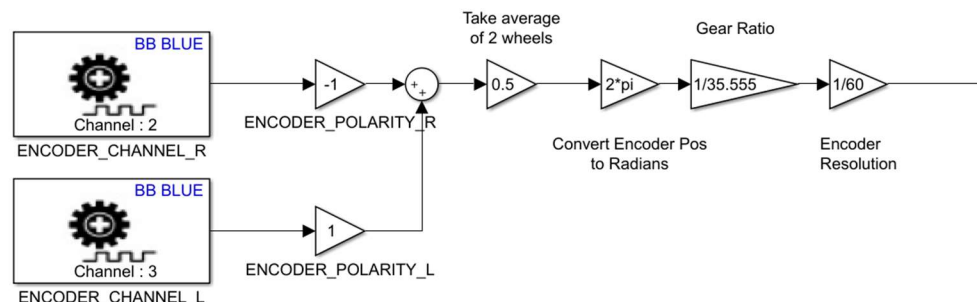
En la siguiente imagen se muestra la medida que arroja el IMU en radianes, se ponen en tres inclinaciones distintas, de 0 a 10 seg el robot se encuentra acostado hacia atrás, de 10 a 20 seg el robot esta con 90 grados de inclinación, que es la posición de equilibrio del robot cuando tenga implementado el control, de 20 a 30 seg el robot se encuentra recostado hacia el frente.

Gráfico 8. Respuesta del IMU vs tiempo



El bloque que se necesita para completar todos los componentes es el del sistema de encoders, que se utiliza para medir las rotaciones angulares, con esta medida se puede hallar el desplazamiento, además se puede utilizar para determinar la velocidad angular, a continuación, se muestra el sistema de bloques:

Figura 27. Bloque del sistema de encoders



En detalle se hace un promedio de las señales que arrojan ambos sensores, después se debe multiplicar por una ganancia de  $2\pi$ , para convertir la posición que sale de las señales a radianes, después de multiplica por la relación de los engranajes, por último, para sacar la medida se debe multiplicar por la resolución del encoder, después de pasar por todas estas etapas se obtiene la posición en función de desplazamiento angular en radianes.

## BIBLIOGRAFÍA

Aracil, J. y Gordillo, F. (2010) «El Péndulo Invertido: un Desafío para el Control No Lineal», *Revista Iberoamericana de Automática e Informática industrial*, 2(2), pp. 8–19.

Castaños, Fernando & Carrera, Rolando. (2004). «Levantamiento y control de un péndulo invertido con un esquema de control reconfigurable», *XI Congreso Latinoamericano de Control Automático*.

Lal Bahadur Prasad, Barjeev Tyagi and Hari Om Gupta, “Optimal Control of Nonlinear Inverted Pendulum System Using PID Controller and LQR: Performance Analysis Without and With Disturbance Input”, *International Journal of Automation and Computing*, vol. 11, Issue 6, Dec, 2014

Prasad, Lal & Tyagi, Barjeev & Gupta, Hari. (2014). «Optimal Control of Nonlinear Inverted Pendulum System Using PID Controller and LQR: Performance Analysis Without and With Disturbance Input». *International Journal of Automation and Computing*.

TDK Corporation. MPU-9250. [“en línea”]. <https://invensense.tdk.com/products/motion-tracking/9-axis/mpu-9150/>. 9 de noviembre 2020.

Frank Mecafenix. ¿Qué es un Encoder?. [blog]. <https://www.ingmecafenix.com/automatizacion/encoder/>. 15 de diciembre 2020.

ETSETB. MATLAB. Fundamentos y/o Aplicaciones. Curso 11/12b, Tema 5. Simulink. [“en línea”]. [https://upcommons.upc.edu/bitstream/handle/2117/192916/tema\\_5\\_simulink-5156.pdf?sequence=7&isAllowed=y#:~:text=SIMULINK%20es%20una%20toolbox%20especial,comportamiento%20de%20los%20sistemas%20din%C3%A1micos.&text=Es%20un%20entorno%20gr%C3%A1fico%20en,dife](https://upcommons.upc.edu/bitstream/handle/2117/192916/tema_5_simulink-5156.pdf?sequence=7&isAllowed=y#:~:text=SIMULINK%20es%20una%20toolbox%20especial,comportamiento%20de%20los%20sistemas%20din%C3%A1micos.&text=Es%20un%20entorno%20gr%C3%A1fico%20en,dife). Consultado: 20 de marzo de 2021.

ECURED.LAGRANE sección, Generalidades. [“en línea”]. [https://www.ecured.cu/M%C3%A9todo\\_de\\_Lagrange](https://www.ecured.cu/M%C3%A9todo_de_Lagrange). Consultado: 20 de marzo de 2021.

Robot Control Library. Updating beagleBone Image. [“en línea”]. <http://strawsondesign.com/docs/librobotcontrol/flashing.html>. Consultado: 20 de marzo de 2021.

Archlinux. ConnMan. [*“en línea”*]. <https://wiki.archlinux.org/title/ConnMan>. Consultado: 20 de marzo de 2021

Linuxhispano. Diferencia entre apt-get update y apt-get upgrade. [*“en línea”*]. <https://www.linuxhispano.net/2013/05/03/diferencia-entre-apt-get-update-y-apt-get-upgrade/>. Consultado: 20 de marzo de 2021.

Github. Librería Robotics Cape. [*“en línea”*]. [https://github.com/h2mille/Robotics\\_Cape\\_Installer](https://github.com/h2mille/Robotics_Cape_Installer). Consultado: 20 de marzo de 2021.

Wikipedia. PONG. [*“en línea”*]. <https://es.wikipedia.org/wiki/Pong>. Consultado: 20 de marzo de 2021

Mathworks. BeagleBone Blue Support From simulink Coder [*“en línea”*]. [https://www.mathworks.com/hardware-support/beaglebone-blue.html?s\\_tid=srchtitle\\_beaglebone\\_3](https://www.mathworks.com/hardware-support/beaglebone-blue.html?s_tid=srchtitle_beaglebone_3). Consultado: 20 de marzo de 2021

Unidad de Medida Inercial. Algoritmo de Estimación e Implementación Software. [*“en línea”*]. [https://biblus.us.es/bibing/proyectos/abreproy/11253/fichero/memoria%252F01\\_capitulo1.pdf](https://biblus.us.es/bibing/proyectos/abreproy/11253/fichero/memoria%252F01_capitulo1.pdf). Consultado: 20 de marzo de 2021