



CARTA DE AUTORIZACIÓN

CÓDIGO

AP-BIB-FO-06

VERSIÓN

1

VIGENCIA

2014

PÁGINA

1 de 2

Neiva, 23 de julio de 2019

Señores

CENTRO DE INFORMACIÓN Y DOCUMENTACIÓN

UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA

Ciudad

Los suscritos:

SAMUEL MAURICIO BRAND ALARCÓN, con C.C. No. 1082216793,

LUISA FERNANDA ARISTIZABAL VELASQUEZ, con C.C. No. 1075305538.

Autor(es) de la tesis y/o trabajo de grado

Titulado DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE UN CONTROLADOR BASADO EN LÓGICA FUZZY APLICADO AL SISTEMA BALL AND PLATE CE 151

Presentado y aprobado en el año 2019 como requisito para optar al título de INGENIERO ELECTRÓNICO;

Autorizamos al CENTRO DE INFORMACIÓN Y DOCUMENTACIÓN de la Universidad Surcolombiana para que, con fines académicos, muestre al país y el exterior la producción intelectual de la Universidad Surcolombiana, a través de la visibilidad de su contenido de la siguiente manera:

- Los usuarios puedan consultar el contenido de este trabajo de grado en los sitios web que administra la Universidad, en bases de datos, repositorio digital, catálogos y en otros sitios web, redes y sistemas de información nacionales e internacionales "open access" y en las redes de información con las cuales tenga convenio la Institución.
- Permita la consulta, la reproducción y préstamo a los usuarios interesados en el contenido de este trabajo, para todos los usos que tengan finalidad académica, ya sea en formato Cd-Rom o digital desde internet, intranet, etc., y en general para cualquier formato conocido o por conocer, dentro de los términos establecidos en la Ley 23 de 1982, Ley 44 de 1993, Decisión Andina 351 de 1993, Decreto 460 de 1995 y demás normas generales sobre la materia.
- Continúo conservando los correspondientes derechos sin modificación o restricción alguna; puesto que, de acuerdo con la legislación colombiana aplicable, el presente es un acuerdo jurídico que en ningún caso conlleva la enajenación del derecho de autor y sus conexos.

De conformidad con lo establecido en el artículo 30 de la Ley 23 de 1982 y el artículo 11 de la Decisión Andina 351 de 1993, "Los derechos morales sobre el trabajo son propiedad de los autores" , los cuales son irrenunciables, imprescriptibles, inembargables e inalienables.

Vigilada Mineducación



**UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA
GESTIÓN SERVICIOS BIBLIOTECARIOS**



CARTA DE AUTORIZACIÓN

CÓDIGO

AP-BIB-FO-06

VERSIÓN

1

VIGENCIA

2014

PÁGINA

2 de 2

SAMUEL MAURICIO BRAND ALARCÓN

Firma:

LUISA FERNANDA ARISTIZABAL VELASQUEZ

Firma:

Vigilada Mineducación

La versión vigente y controlada de este documento, solo podrá ser consultada a través del sitio web Institucional www.usco.edu.co, link Sistema Gestión de Calidad. La copia o impresión diferente a la publicada, será considerada como documento no controlado y su uso indebido no es de responsabilidad de la Universidad Surcolombiana.



TÍTULO COMPLETO DEL TRABAJO: DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE UN CONTROLADOR BASADO EN LÓGICA FUZZY APLICADO AL SISTEMA BALL AND PLATE CE 151

AUTOR O AUTORES:

Primero y Segundo Apellido	Primero y Segundo Nombre
BRAND ALARCON	SAMUEL MAURICIO
ARISTIZABAL VELASQUEZ	LUISA FERNANDA

DIRECTOR Y CODIRECTOR TESIS:

Primero y Segundo Apellido	Primero y Segundo Nombre
ROBAYO BETANCOURT	FAIBER IGNACIO

ASESOR (ES):

Primero y Segundo Apellido	Primero y Segundo Nombre
----------------------------	--------------------------

PARA OPTAR AL TÍTULO DE: INGENIERO ELECTRÓNICO

FACULTAD: INGENIERÍA

PROGRAMA O POSGRADO: INGENIERÍA ELECTRÓNICA

CIUDAD: NEIVA

AÑO DE PRESENTACIÓN: 2019

NÚMERO DE PÁGINAS: 65

TIPO DE ILUSTRACIONES (Marcar con una X):

Diagramas_X__ Fotografías_X__ Grabaciones en discos___ Ilustraciones en general___ Grabados___
Láminas___ Litografías___ Mapas___ Música impresa___ Planos___ Retratos___ Sin ilustraciones___ Tablas
o Cuadros_X_



SOFTWARE requerido y/o especializado para la lectura del documento: N/A

MATERIAL ANEXO: N/A

PREMIO O DISTINCIÓN (En caso de ser LAUREADAS o Meritoria): Meritoria

PALABRAS CLAVES EN ESPAÑOL E INGLÉS:

<u>Español</u>	<u>Inglés</u>
1. BOLA Y PLATO	BALL AND PLATE
2. CONTROLADOR FUZZY	FUZZY CONTROLLER
3. CONTROLADOR PID	PID CONTROLLER
4. MATLAB	MATLAB
5. SISTEMAS DE CONTROL	CONTROL SYSTEMS

RESUMEN DEL CONTENIDO: (Máximo 250 palabras)

En este documento se muestra el diseño e implementación de un controlador *Fuzzy* y un controlador PID aplicados al sistema Ball and Plate, un modelo educativo diseñado por HUMUSOFT, y adquirido por la Universidad Surcolombiana.

El método de diseño escogido para el controlador PID fue el Lugar Geométrico de las Raíces, como no se conocen parámetros de la respuesta del sistema debido a su dinámica, se realizaron doce controladores, el controlador PID con mejor desempeño fue seleccionado tomando como referencia el menor valor de la raíz del error cuadrático medio (RMSE). El diseño del controlador *Fuzzy* se realizó con ayuda de la herramienta *FuzzyLogicDesigner* de MatLab, que facilita el diseño y prueba de sistemas difusos, se realizaron dos controladores, aplicando sistemas de inferencia Mamdani y Sugeno.

Posteriormente, se analizó el comportamiento de los controladores PID y *Fuzzy*, se escogió el mejor controlador de las dos lógicas de control, junto con un tercer controlador proporcionado por el fabricante, los cuales fueron comparados entre sí; finalmente se concluye y se dictan algunas recomendaciones para trabajos futuros con el sistema Ball and Plate.



ABSTRACT: (Máximo 250 palabras)

This document shows the design and implementation of a Fuzzy controller and PID controller applied to Ball and Plate system, an educational model designed by HUMUSOFT, and acquired by Universidad Surcolombiana.

The design method chosen for PID controller was Root Locus, as there are not known parameters of the system response due to its dynamics, twelve controllers were made, the PID controller with the best performance was selected taking as reference the lowest Root Mean Square Error (RMSE) score. Fuzzy controller design was made with MatLab's Fuzzy Logic Designer tool that facilitates the design and testing of fuzzy systems, two controllers were made, applying Mamdani and Sugeno inference systems.

Afterwards, the behavior of the PID and Fuzzy controllers was analyzed, the best controller of the two control logic was selected, together with a third controller. Finally, the conclusions are presented together with the recommendations for future work with the Ball and Plate system.

APROBACION DE LA TESIS

Nombre Presidente Jurado: FAIBER IGNACIO ROBAYO BETANCOURT

Firma:

Nombre Jurado: DIEGO FERNANDO SENDOYA LOSADA

Firma:

Nombre Jurado: JOSÉ DE JESÚS SALGADO PATRON

Firma:

DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE UN CONTROLADOR BASADO EN LÓGICA
FUZZY APLICADO AL SISTEMA BALL AND PLATE “CE 151”

LUISA FERNANDA ARISTIZABAL VELASQUEZ
SAMUEL MAURICIO BRAND ALARCÓN

UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA
FACULTAD DE INGENIERÍA
INGENIERÍA ELECTRÓNICA
NEIVA
2019

DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE UN CONTROLADOR BASADO EN LÓGICA
FUZZY APLICADO AL SISTEMA BALL AND PLATE “CE 151”

LUISA FERNANDA ARISTIZABAL VELASQUEZ
SAMUEL MAURICIO BRAND ALARCÓN

Trabajo de Grado para optar al título de
Ingeniero Electrónico

Director
Faiber Ignacio Robayo Betancourt
Mag. en Ingeniería de Control Industrial

UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA
FACULTAD DE INGENIERÍA
INGENIERÍA ELECTRÓNICA
NEIVA
2019

Nota de aceptación:

Firma del Jurado

Firma del Jurado

DEDICATORIA

A mis padres Oscar Fernando Aristizabal y Luz Enith Velásquez, a mis hermanos Jaime Enrique Aristizabal Velásquez y Tomas Aristizabal Velásquez.
Luisa Aristizabal

Dedico este trabajo a mis padres Samuel Brand Cedeño y Mercedes Alarcón Monje, a mi hermana Erika T. Brand Alarcón.
Samuel Brand

AGRADECIMIENTOS

Le agradecemos a Dios por guiarnos a lo largo de este proceso formativo, a nuestros padres por los consejos, el apoyo en momentos de debilidad, el ejemplo de constancia y responsabilidad. A nuestros hermanos por la compañía y apoyo brindado. Les agradecemos a los ingenieros del programa de Ingeniería Electrónica por habernos formado académicamente, en especial al director de este proyecto de investigación, el ingeniero Faiber Robayo, y al ingeniero Vladimir Mosquera por tan valiosos conocimientos y consejos. A nuestros amigos por la compañía, y el cariño que nos brindaron a lo largo de esta carrera universitaria.

CONTENIDO

	pág.
INTRODUCCIÓN	14
1. OBJETIVOS	15
2. MARCO REFERENCIAL	16
2.1. METODOLOGÍA DE DESARROLLO	18
3. SISTEMA BALL AND PLATE	20
3.1. ESTRUCTURA DEL SISTEMA BALL AND PLATE	20
3.2. MODELO MATEMÁTICO	24
3.2.1. Modelo cinemático	24
3.2.2. Linealización y Simplificación del Modelo Matemático	27
3.2.3. Validación del modelo matemático	29
3.3. DISEÑO DE LA INTERFAZ DE CONTROL	32
4. CONTROL PID	34
4.1. GENERALIDADES	34
4.2. CONTROLADOR PID	35
4.3. PARÁMETROS DE DISEÑO DE CONTROLADORES	36
4.4. FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA EN TIEMPO DISCRETO	38
4.5. DISEÑO DE CONTROLADORES	39
5. CONTROL FUZZY	42
5.1. GENERALIDADES	42
5.2. CONTROL FUZZY	44
6. RESULTADOS Y ANÁLISIS DE RESULTADOS	50
6.1. SELECCIÓN DE CONTROLADORES	50
6.2. SEGUIMIENTO A REFERENCIA	53
6.3. ROBUSTEZ DE LOS CONTROLADORES	56
7. CONCLUSIONES	59
8. RECOMENDACIONES	61
BIBLIOGRAFÍA	63
ANEXOS	64

LISTA DE FIGURAS

	pág.
Figura 1. Fases del proyecto.	18
Figura 2. Vista interior del sistema Ball and Plate	20
Figura 3. Sistema Ball and Plate	21
Figura 4. Tarjeta de adquisición de datos MF624.	22
Figura 5. Vista inferior del sistema Ball and Plate	22
Figura 6. Microsoft Lifecam Cinema HD	23
Figura 7. Diagrama de bloques del sistema de control Ball and Plate	24
Figura 8. Diagrama de bloques para el modelo no lineal, eje X	28
Figura 9. Diagrama de bloques para el modelo lineal	28
Figura 10. Respuesta del modelo lineal y no lineal ante una entrada de tipo escalón	29
Figura 11. Datos tomados de la planta Ball and Plate y respuesta del mo- delo matemático original ante una entrada de 4 grados, eje X.	29
Figura 12. Datos tomados de la planta Ball and Plate y respuesta del mo- delo matemático original ante una entrada de 4 grados, eje Y.	30
Figura 13. Datos tomados de la planta Ball and Plate y respuesta del mo- delo matemático ajustado ante una entrada de 4 grados, eje X.	30
Figura 14. Datos tomados de la planta Ball and Plate y respuesta del mo- delo matemático ajustado ante una entrada de 4 grados, eje Y.	31
Figura 15. Respuesta del modelo matemático ajustado sin filtro y modelo matemático ajustado con filtro ante una entrada de 4 grados, eje X.	31
Figura 16. Respuesta del modelo matemático ajustado sin filtro y modelo matemático ajustado con filtro ante una entrada de 4 grados, eje Y.	32
Figura 17. Interfaz gráfica diseñada con ayuda del entorno de desarrollo GUIDE.	33
Figura 18. Diagrama de bloques control PID.	34
Figura 19. Diagrama de bloques del algoritmo de control PID.	36
Figura 20. Lugar geométrico de las raíces de la función de transferencia en tiempo discreto.	39
Figura 21. Diagrama de bloques control Fuzzy	42
Figura 22. Estructura de un sistema basado en reglas fuzzy	43
Figura 23. Topología del controlador <i>Fuzzy</i>	44
Figura 24. Señal de salida, error y derivada del error.	45
Figura 25. Conjunto Fuzzy para el error.	46
Figura 26. Conjunto Fuzzy para la derivada del error.	46
Figura 27. Conjunto Fuzzy para la salida del controlador.	47
Figura 28. Curva de control del controlador <i>Fuzzy Mamdani</i>	48
Figura 29. Curva de control del controlador <i>Fuzzy Sugeno</i>	49
Figura 30. Resultados de los controladores PID 1,2,3,5 y 6	50

Figura 31. Resultados de los controladores PID 7,9,10,11 y 12	51
Figura 32. Resultados de los controladores PID 7 y 11	52
Figura 33. Resultados de los controladores Fuzzy empleando sistema de inferencia Mamdani y Sugeno	53
Figura 34. Resultados de los controladores PID, Fuzzy y PID por defecto	54
Figura 35. Segmento de los resultados de los controladores PID, Fuzzy y PID por defecto	54
Figura 36. Respuesta del controlador PID vs controlador <i>Fuzzy</i> en distintos puntos de operación	55
Figura 37. Diagrama de bloques con perturbación al sistema	56
Figura 38. Respuesta de los tres controladores ante una perturbación	57

LISTA DE TABLAS

pág.

Tabla 1. Variables físicas y parámetros del sistema Ball and Plate Fuente: Manual de la planta Ball and plate “CE 151”	25
Tabla 2. Ventajas y desventajas de las acciones proporcional, integral y derivativa.	35
Tabla 3. Tiempo de muestreo para distintos valores de sobreimpulso y tiempo de establecimiento	37
Tabla 4. Resultado al aplicar tiempos de muestreo entre 0.1 y 0.2 segundos.	38
Tabla 5. Ubicación de polos y ceros.	39
Tabla 6. Ubicación del polo deseado de los controladores PID	40
Tabla 7. Ubicación de ceros y ganancia K de controladores PID	41
Tabla 8. Constantes K_p , K_i y K_d de los controladores PID	41
Tabla 9. Conjunto <i>Fuzzy</i> de la entrada 1	45
Tabla 10. Conjunto <i>Fuzzy</i> de la entrada 2	46
Tabla 11. Conjunto <i>Fuzzy</i> de la salida empleando sistema de inferencia Mamdani	47
Tabla 12. Conjunto <i>Fuzzy</i> de la salida empleando sistema de inferencia Sugeno	48
Tabla 13. Valor RMSE de los 12 controladores PID diseñados	51
Tabla 14. Valor RMSE de los 2 controladores Fuzzy diseñados	52
Tabla 15. Parámetros de interés de los controladores PID, Fuzzy y PID por defecto	55
Tabla 16. Prueba de robustez de los controladores PID, Fuzzy y PID por defecto	56
Tabla 17. Valor RMSE promedio de los tres controladores, utilizando la bola por defecto	57
Tabla 18. Valor RMSE promedio de los tres controladores, utilizando la bola de mayor masa	57

LISTA DE ANEXOS

	pág.
Anexo A. Datos técnicos del sistema Ball and Plate	64
Anexo B. Aproximación de ángulo pequeño	65

GLOSARIO

CPU: (Unidad Central de Procesamiento) Componente básico de la computadora, encargada de procesar los datos del sistema.

GUIDE: Entorno de desarrollo de interfaces gráficas de usuario.

LGR: (Lugar Geométrico de las Raíces) Método de diseño de sistemas de control basado en el lugar geométrico de los polos y ceros del sistema.

PCI: (Interconexión de Componentes Periféricos) Bus estándar de computadoras para conectar dispositivos periféricos directamente a la placa base.

PID: (Proporcional-Integral-Derivada) Mecanismo de control por realimentación.

RMSE: (Raíz del Error Cuadrático Medio) Mide la cantidad de error que hay entre dos conjuntos de datos.

RESUMEN

TÍTULO: DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE UN CONTROLADOR BASADO EN LÓGICA FUZZY APLICADO AL SISTEMA BALL AND PLATE CE 151 ^{*}

AUTOR: LUISA FERNANDA ARISTIZABAL
SAMUEL MAURICIO BRAND ^{**}

PALABRAS CLAVE: BOLA Y PLATO, CONTROLADOR *FUZZY*, CONTROLADOR PID, MATLAB, SISTEMAS DE CONTROL

DESCRIPCIÓN:

En este documento se muestra el diseño e implementación de un controlador *Fuzzy* y un controlador PID aplicados al sistema Ball and Plate, un modelo educativo diseñado por HUMUSOFT, y adquirido por la Universidad Surcolombiana.

El método de diseño escogido para el controlador PID fue el Lugar Geométrico de las Raíces, como no se conocen parámetros de la respuesta del sistema debido a su dinámica, se realizaron doce controladores, el controlador PID con mejor desempeño fue seleccionado tomando como referencia el menor valor de la raíz del error cuadrático medio (RMSE). El diseño del controlador *Fuzzy* se realizó con ayuda de la herramienta *FuzzyLogicDesigner* de MatLab, que facilita el diseño y prueba de sistemas difusos, se realizaron dos controladores, aplicando sistemas de inferencia Mamdani y Sugeno.

Posteriormente, se analizó el comportamiento de los controladores PID y *Fuzzy*, se escogió el mejor controlador de las dos lógicas de control, junto con un tercer controlador proporcionado por el fabricante, los cuales fueron comparados entre sí; finalmente se concluye y se dictan algunas recomendaciones para trabajos futuros con el sistema Ball and Plate.

* Trabajo de grado

** Facultad de Ingeniería. Ingeniería Electrónica. Director: Faiber Ignacio Robayo, Mag. en Ingeniería de Control Industrial.

ABSTRACT

TITLE: DESIGN AND IMPLEMENTATION OF FUZZY LOGIC-BASED CONTROLLER APPLIED TO CE 151 BALL AND PLATE SYSTEM 

AUTHOR: LUISA FERNANDA ARISTIZABAL
SAMUEL MAURICIO BRAND 

KEYWORDS: BALL AND PLATE, CONTROL SYSTEMS, FUZZY CONTROLLER, MATLAB, PID CONTROLLER.

DESCRIPTION:

This document shows the design and implementation of a Fuzzy controller and PID controller applied to Ball and Plate system, an educational model designed by HUMUSOFT, and acquired by Universidad Surcolombiana.

The design method chosen for PID controller was Root Locus, as there are not known parameters of the system response due to its dynamics, twelve controllers were made, the PID controller with the best performance was selected taking as reference the lowest Root Mean Square Error (RMSE) score. Fuzzy controller design was made with MatLab's Fuzzy Logic Designer tool that facilitates the design and testing of fuzzy systems, two controllers were made, applying Mamdani and Sugeno inference systems.

Afterwards, the behavior of the PID and Fuzzy controllers was analyzed, the best controller of the two control logic was selected, together with a third controller. Finally, the conclusions are presented together with the recommendations for future work with the Ball and Plate system.

* Bachelor Thesis

** School of Engineering. Electronic Engineering. Directed By: Faiber Ignacio Robayo, MSc. Industrial Control Engineering.

INTRODUCCIÓN

Como es bien sabido los controladores que emplean algoritmos inteligentes son poco usados en la industria gracias a los buenos resultados que se obtienen con los algoritmos de control moderno y al costo computacional que involucra un controlador de tipo inteligente, sin embargo, gracias a la evolución tecnológica y creciente desarrollo computacional, los algoritmos inteligentes cada día toman mayor fuerza, aprovechando su ventaja de poder resolver problemas con mejores resultados que los controladores modernos, por ello es importante desarrollar investigaciones que permitan demostrar en la práctica las ventajas que conlleva la utilización de controladores inteligentes.

De acuerdo con Bonifacio y Molina¹, "El control inteligente comprende una serie de técnicas tomadas fundamentalmente de inteligencia artificial con las que se pretenden resolver problemas de control", la Universidad Surcolombiana cuenta con la electiva profesional "Control Inteligente", en la que se estudian técnicas como redes neuronales y lógica *Fuzzy*, sin embargo, hasta antes de la llegada del sistema ball and plate no se contaba en el laboratorio de control con un sistema de estas características para reforzar la teoría del control inteligente y por lo tanto la práctica se limitaba a abordar sistemas estables y de polinomios de máximo segundo orden en su función de transferencia o desde herramientas matemáticas como simuladores.

El fabricante del sistema ball and plate CE 151, proporciona los drivers necesarios para que este funcione en MatLab lo que facilita ampliamente la comunicación y el control del sistema, gracias a la herramienta GUIDE se realiza la interfaz de usuario, la cual permite observar la respuesta del sistema, introducir las coordenadas de la posición deseada de la bola o elegir el controlador con el que funciona el sistema, por otro lado, MatLab cuenta con un toolbox ampliamente utilizado para el diseño de procesos que involucran lógica *Fuzzy*, por estas razones MatLab es escogido como el lenguaje de programación de este proyecto.

Diseñar e implementar un controlador basado en lógica *Fuzzy* aplicado al sistema Ball and Plate CE 151, permite establecer una comparación en el rendimiento de controladores inteligentes y modernos, así como las ventajas y desventajas que estos presentan, por otro lado, motivará a otros estudiantes a realizar otras investigaciones sobre otros métodos de control que pueden ser aplicados al sistema Ball and Plate.

¹ BONIFACIO, Martín del Brío. MOLINA, Alfredo. Redes Neuronales y Sistema Borrosos. 3a Edición. México: Alfaomega, 2011. p. 246

1. OBJETIVOS

Objetivo general

- Diseñar e implementar un controlador basado en lógica fuzzy, aplicado al sistema ball and plate "CE 151" de la Universidad Surcolombiana.

Objetivos específicos

- Diseñar e implementar un controlador basado en técnicas de control PID.
- Diseñar e implementar un controlador basado en lógica *Fuzzy*.
- Comparar el desempeño de la respuesta del sistema Ball and Plate utilizando los controladores PID y lógica *Fuzzy*.

2. MARCO REFERENCIAL

Numerosos trabajos se han realizado con sistemas de control moderno e inteligente a plantas de tipo Ball and Plate, y específicamente en la planta “CE 151”:

Control of Laboratory Model Ball and Plate. Department of Cybernetics and Artificial Intelligence. Basado en el modelo de la planta se realizan controladores de tipo PD y PID, se emplea el software MatLab y su librería Simulink enfocado al seguimiento de trayectorias circulares cuadradas y de forma en estrella, como resultado se obtuvo que el controlador PID tuvo mejores resultados que el PD, como trabajo futuro se propone la utilización de técnicas de control inteligente como lógica difusa. ²

Design of Fuzzy Sliding Mode Controller For The Ball and Plate System. Addis Ababa University. Se construye la planta y se obtiene el modelo no lineal de la planta de forma matemática, se implementa el sistema en Simulink, se construyen las reglas del modelo Fuzzy en MatLab, se realizan pruebas desde el simulador y en la planta donde se obtienen resultados favorables. ³

Control difuso vs PID para un sistema de bola y plataforma. Universidad Tecnológica Nacional. Se aplican técnicas de control PID y lógica difusa a una planta multivariable, no lineal e inherentemente inestable bola y plataforma, se realiza el modelado matemático de la planta, el modelo PID utilizado es Mamdani, en lógica difusa se emplearon técnicas de prueba y error para encontrar el mejor algoritmo, el lenguaje de programación utilizado fue MatLab y su librería Simulink, se sometieron los algoritmos a distintas pruebas como seguimiento de trayectoria circular y cuadrada, se concluyó que el controlador difuso obtuvo resultados superiores a los obtenidos con el controlador clásico PID, como trabajo futuro se propone la implementación de un controlador basado en redes neuronales. ⁴

Digital Control of CE 151 Ball and Plate Model. Universidad Tomás de Bati y Zúñiga. Se minimizó el criterio de LQ cuadrático lineal para la estructura de controlador 2DOF usando factorización espectral, lo que da como resultado un controlador casi óptimo y relativamente robusto capaz de proporcionar un buen seguimiento de referencia y rechazo de perturbaciones. Para hacer que la selección de la señal de referencia sea interesante y automática, se construyó un laberinto 2D en la parte superior de la placa. Los resultados que se muestran en esta tesis son

-
- ² HLADKÝ, Vratislav. LI??INSKÝ, Pavol. Control de Laboratorio de Modelo Plato y Bola. En: Transfer inovácií, Vol., 26 (2013); p. 209-214.
 - ³ HUNDE, Andinet Negash. Design Of Fuzzy Sliding Mode Controller For The Ball and Plate System, Etiopía, 2013, 105p. Trabajo de investigación (Magister de ciencias en Ingeniería Electronica). Addis Ababa University. Department of Electrical and Computer Engineering.
 - ⁴ PENCO, José Jorge. MODESTI, Mario Roberto. Control difuso vs PID para un sistema de bola y plataforma. En línea 19 de Marzo de 2018 Disponible en <http://ria.utn.edu.ar/handle/123456789/2562>.

prometedores y demuestran que el controlador LQ es muy adecuado para este modelo.⁵

Stabilizing of Ball and Plate System Using an Approximate Model. Istanbul Technical University. En este artículo se considera el problema de estabilización del sistema de Ball and plate usando los métodos desarrollados para controlar los sistemas infra-accionados para los sistemas Euler-Lagrange (EL). El modelo aproximado del sistema de ball and plate se construye primero con dos sistemas separados y luego cada sistema se aproxima mezclando algunos sistemas EL lineales.⁶

Modelling and Control of Ball and Beam System using Coefficient Diagram Method (CDM) based PID controller. Kongu Engineering College, Tamilnadu, India, Este artículo presenta una metodología de diseño de un controlador PID para un sistema ball and plate basado en el Método de Diagrama de Coeficiente (CDM). Para evaluar el rendimiento del controlador CDM-PID propuesto, se analiza el rendimiento por medio del seguimiento del punto de ajuste y el análisis de rechazo de perturbaciones del sistema, los cuales se llevan a cabo mediante trayectorias de simulación en Simulink. Los resultados revelan que el controlador CDM-PID mantiene una buena estabilidad de la posición de la bola con un porcentaje de error menor al del controlador ZN-PID.

Al realizar la búsqueda a nivel nacional, no se encontraron trabajos de grado relacionados con el sistema Ball and Plate “CE151” sin embargo, se encontró un trabajo el cual implementa de un sistema ball and plate.⁷

Diseño, implementación y control de sistema de balance ball and plate. En este proyecto se construye una plataforma a bajo costo que permite experimentar y ver la respuesta de los controladores que actualmente se implementan en procesos industriales reuniendo modelamiento, análisis y control en tiempo real y así obteniendo una validación de los controladores. Se aplica una señal de un paso a la planta construida y se tarda un tiempo de 28.6 segundos, esto quiere decir que los motores que controlan el desplazamiento sobre los ejes de coordenada (X, Y) tardarían todo ese tiempo en responder ante una señal de control. Por tal motivo, se diseñaron los controladores con control proporcional, integral y derivativo.⁸

⁵ SPASEK, Jkubo. Digital Control of CE 151 Ball and Plate Model Zlin, 2016, 71p, Trabajo de investigación (Magister en control automático e informática). Universidad Tomáze Bati ve Zlín, Facultad de aplicaciones informáticas.

⁶ ALPASLAN, Yildiz. GOREN-SUMER Leyla. Stabilizing of Ball and Plate System Using an Approximate Model. En: IFAC, Vol., 50 No1 (Jul.2017); p. 9601-9606.

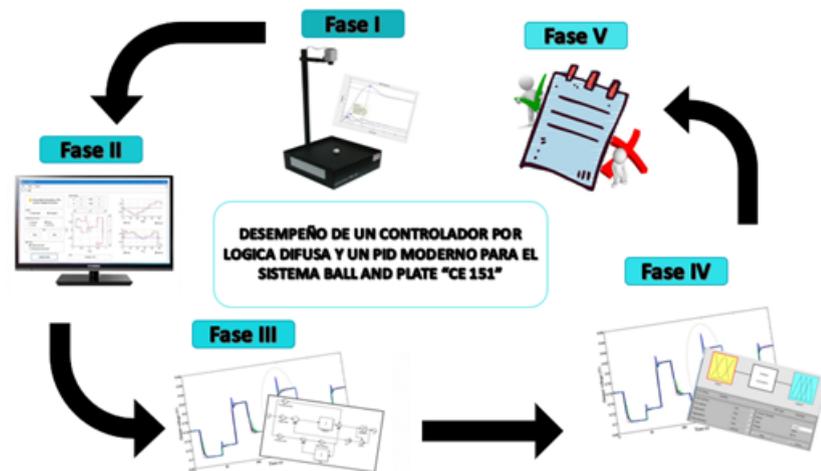
⁷ MEENAKSHIPRIYA, B. KALPANA Kannan. Modelling and Control of Ball and Beam System using Coefficient Diagram Method (CDM) based PID controller. En: IFAC, Vol., 47 No1, (2014); p. 620-626.

⁸ MORIONES Edna Carolina. Diseño, implementación y control de sistema de balance ball and plate. En: SENNOVA, Vol., 2 No2, (2016); p.135-149.

2.1. METODOLOGÍA DE DESARROLLO

A continuación, se describen los pasos que se han llevado a cabo para la realización de este trabajo de grado, los cuales han sido agrupados en cinco fases:

Figura 1. Fases del proyecto.



La primera fase comprende la obtención del modelo matemático que describe la dinámica de la bola sobre el plato, este se realiza con ayuda de las ecuaciones de Euler-Lagrange y algunas simplificaciones matemáticas, posteriormente este modelo se valida con ayuda de datos tomados del sistema para un punto de operación específico.

La segunda fase es la construcción de la interfaz gráfica que permite al usuario observar la respuesta del sistema en tiempo real, de igual forma permite establecer valores en la referencia X o Y, ó elegir trayectoria aleatoria, también permite escoger el tipo de controlador con el que funciona el sistema, todo esto se realiza con ayuda con el entorno de desarrollo GUIDE de MatLab, que permite el diseño de la interfaz con opciones pre-programadas como botones o gráficos, a los cuales se les da utilidad específica por medio de programación.

Posteriormente, se realiza el diseño de controladores PID, el método de diseño empleado es el Lugar Geométrico de las Raíces (LGR), debido a que el sistema presenta una dinámica inestable no se cuenta con parámetros como tiempo de establecimiento o sobreimpulso, por ello, se realizan varios diseños que involucran distintos tiempos de establecimiento y sobreimpulso.

La fase cuatro comprende el diseño del controlador *Fuzzy*, el cual es diseñado con ayuda de *Fuzzy Logic Designer*, un toolbox de MatLab que permite diseñar y probar sistemas de inferencia *Fuzzy*, la topología escogida emplea el error y la derivada del error como entradas del sistema de inferencia *Fuzzy* acompañado de una acción integral para corregir el error en estado estacionario, se realizan dos diseños, empleando sistema de inferencia Mamdani y Sugeno.

Finalmente se presentan los resultados, gracias a la Raíz del Error Cuadrático Medio (RMSE), se determina el mejor controlador PID y *Fuzzy*, estos dos controladores son sometidos junto con un tercer controlador PID entregado por el fabricante a pruebas de seguimiento a referencia y perturbación, las cuales permitirán establecer un análisis en el dominio temporal en cuanto al rendimiento de los controladores.

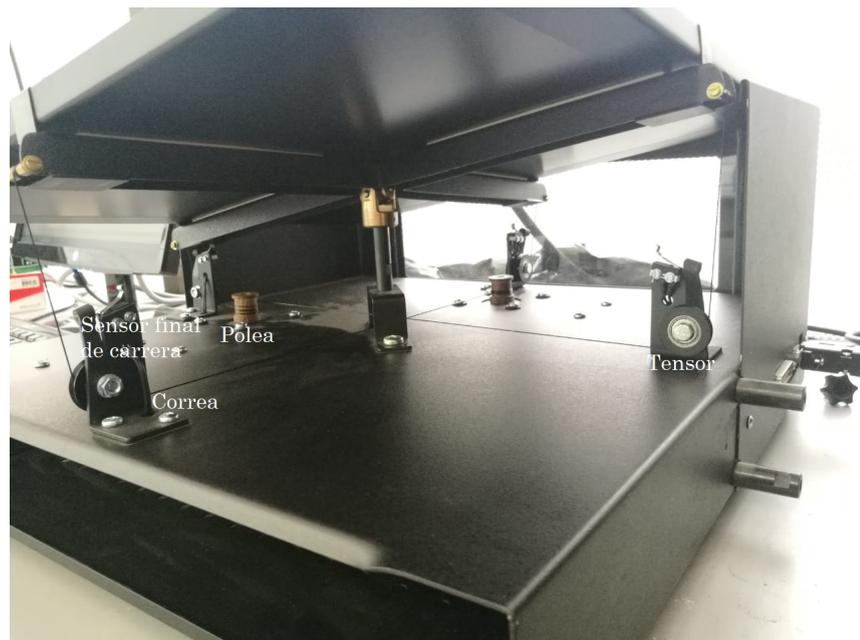
3. SISTEMA BALL AND PLATE

Este capítulo describe la estructura física del sistema Ball and Plate, se especifican los elementos que la componen, así como los elementos de adquisición de datos, posteriormente se realiza el modelado matemático teniendo en cuenta los dos grados de libertad que posee la planta y su dinámica inherentemente inestable, se realiza la aproximación lineal del modelo y se compara con el modelo no lineal, de igual forma, se realiza el ajuste del modelo matemático lineal con datos tomados del sistema Ball and Plate, finalmente se realiza el diseño de la interfaz gráfica y se explica el funcionamiento de esta.

3.1. ESTRUCTURA DEL SISTEMA BALL AND PLATE

El sistema Ball and Plate CE 151 fue desarrollado y fabricado por HUMUSOFT, una empresa de República Checa, dedicada a la investigación y construcción de sistemas de control, computación técnica y diseño basado en modelos. ⁹

Figura 2. Vista interior del sistema Ball and Plate



Su diseño consiste en un plato de 40 cm x 40 cm sobre un pivote con dos grados de libertad, los cuales son accionados por dos motores paso a paso NEMA 17 y una serie de poleas, cada motor cuenta con una resolución de 0.001 grados para lograr un movimiento suave y preciso.

⁹ HUMUSOFT, [En línea], Disponible en: <https://www.humusoft.cz>

Figura 3. Sistema Ball and Plate



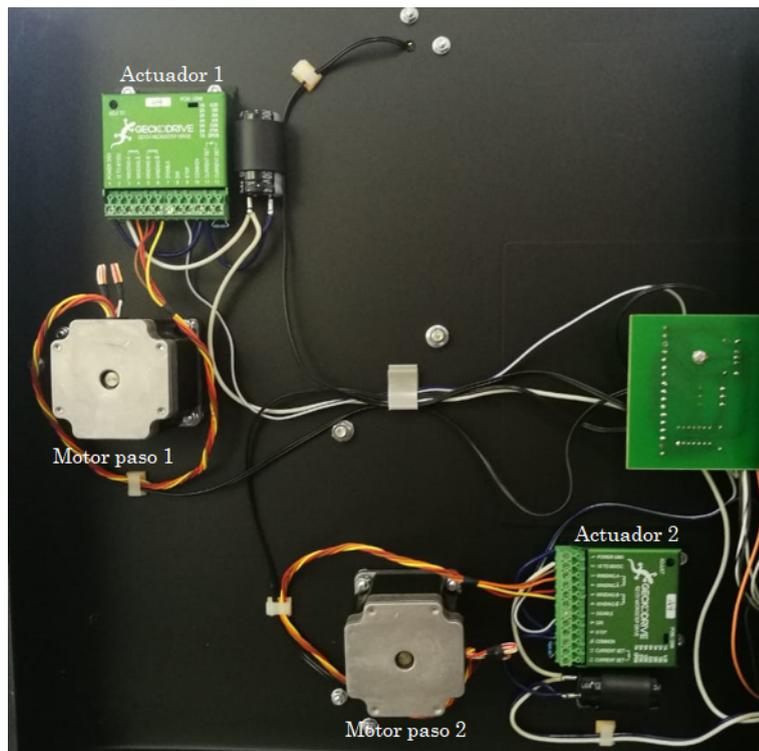
El sistema tiene conexión directa a una CPU por medio de cables de 38 pines, y una tarjeta de adquisición de datos de tipo PCI de referencia MF624 (Figura 4), dentro de las características más importantes de esta tarjeta se destaca, el poder tener entradas digitales y salidas digitales, las entradas digitales recopilan información de los sensores finales de carrera que se encargan de notificar al sistema cuando el plato ha alcanzado su ángulo máximo de inclinación, por otro lado las salidas digitales proporcionan la señal PWM al actuador y la dirección del movimiento del plato.

Figura 4. Tarjeta de adquisición de datos MF624.



El actuador del sistema es un controlador de motor a pasos (Figura 5), contiene un integrado TB6600 que es el encargado de encender correctamente cada una de las bobinas y proporcionar la dirección del movimiento de los motores paso a paso, dependiendo de la señal PWM y una señal booleana proveniente de la tarjeta de adquisición de datos.

Figura 5. Vista inferior del sistema Ball and Plate



La posición de la bola dentro del plato es obtenida por medio de una cámara Microsoft Lifecam Cinema HD (Figura 6) la cual tiene una resolución máxima de 720p por lo tanto permite una alta definición con hasta 30fps, sin embargo para esta aplicación se usa una baja resolución debido a la mínima complejidad en el procesamiento de imagen utilizado, ya que sólo se requiere una segmentación,

dentro de este proceso la posición de la bola es normalizada, así el rango que esta puede tomar dentro del plato es desde -1 unidad normalizada (UN) hasta 1 unidad normalizada (UN).

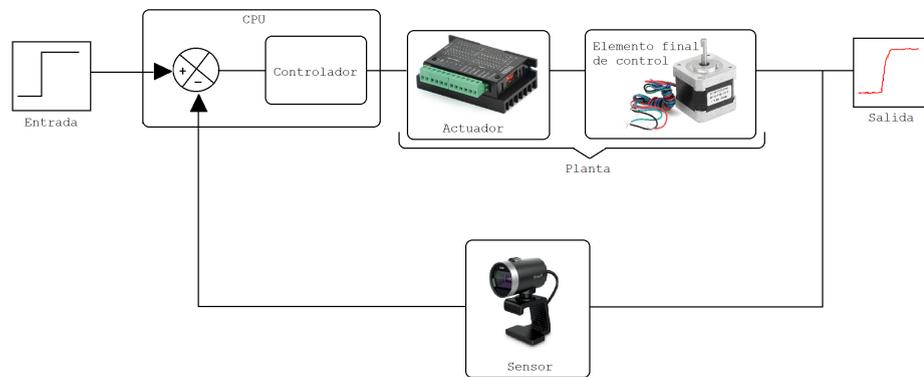
Figura 6. Microsoft Lifecam Cinema HD



HUMUSOFT proporciona dos formas de controlar el sistema, la primera es por medio de un aplicativo desarrollado que contiene un algoritmo PID para ejercer control sobre el sistema, la funcionalidad del aplicativo se reduce a cambiar las constantes proporcional, integral y derivativa del controlador y realizar cambios en la referencia de la bola, la segunda forma es por medio del software MatLab, y su herramienta Simulink, el fabricante desarrolló controladores compatibles con este software, dentro de Simulink se encuentra un bloque de entrada y uno de salida, cada uno con una función específica, el primero recibe la información entregada por la cámara y por medio de procesamiento de imagen obtiene las coordenadas de la bola dentro del plato, el segundo bloque recibe la salida del algoritmo de control diseñado y la envía a la tarjeta de adquisición de datos.

El sistema de control se resume a continuación:

Figura 7. Diagrama de bloques del sistema de control Ball and Plate



3.2. MODELO MATEMÁTICO

3.2.1. Modelo cinemático A continuación, se realiza el modelado matemático del movimiento de la bola sobre el plato, para ello se hace uso de la mecánica lagrangiana. De acuerdo con Spong, Hutchison y Vidysagar, “Las ecuaciones de Euler-Lagrange proporcionan una formulación de las ecuaciones dinámicas de movimiento equivalentes a las derivadas utilizando el método de Segunda Ley de Newton, sin embargo, el enfoque lagrangiano es ventajoso para sistemas más complejos.”¹⁰

Para efectos de simplificación matemática:

- El contacto entre la bola y el plato no se pierde en ninguna circunstancia.
- La bola rueda por el plato mas no se desliza.
- Se desprecian todas las fuerzas de fricción entre la bola y el plato.
- No se consideran los ángulos ni las áreas del plato.

Las siguientes variables son entregadas por el fabricante del sistema.¹¹

¹⁰ SPONG, Mark.HUTCHISON, Seth. VIDYASAGAR, M. Robot Dynamics and Control. 2 edición. 2004. p.194.

¹¹ HUMUSOFT. User's Manual. revisión 3.4. Pag. 8.

Tabla 1. Variables físicas y parámetros del sistema Ball and Plate
Fuente:Manual de la planta Ball and plate “CE 151”

Variable	Unidad	Descripción
x	m	Desplazamiento de la bola a lo largo del eje X
\dot{x}	m/s	Velocidad de la bola a lo largo del eje X
\ddot{x}	m/s^2	Aceleración de la bola a lo largo del eje X
y	m	Desplazamiento de la bola a lo largo del eje Y
\dot{y}	m/s	Velocidad de la bola a lo largo del eje Y
\ddot{y}	m/s^2	Aceleración de la bola a la bola a lo largo del eje Y
θ_x	rad	Inclinación del plato a lo largo del eje X
θ_y	rad	Inclinación del plato a lo largo del eje Y
$\dot{\theta}$	rad/s	Velocidad angular del plato
m	Kg	Masa de la bola
R	m	Radio de la bola
I_b	kgm^2	Momento de inercia de la bola $I_b = \frac{2}{5}mR^2$
\dot{s}	m/s	Velocidad lineal debido a la rotación
h	m	Altura de la bola
g	m/s^2	Gravedad $g = 9.81m/s^2$

L en la ecuación (1), que es la diferencia de la energía cinética y potencial, es llamada el lagrangiano del sistema.

$$L(t) = Ec(t) - Ep(t) \quad (1)$$

Se tiene que la energía cinética es la sumatoria de la energía rotacional de la bola, y el plato, y la energía translacional de la bola y el plato:

$$Ec(t) = Erb(t) + Etb(t) + Erp(t) + Etp(t) \quad (2)$$

donde,

$$Erb(t) = \frac{1}{2}I_b \left(\frac{V}{R} \right)^2 \quad (3)$$

$$Etb(t) = \frac{1}{2}mv^2 \quad (4)$$

$$Erp(t) = \frac{1}{2}I_b \dot{\theta}^2 \quad (5)$$

$$Etp(t) = \frac{1}{2}ms\dot{}^2 \quad (6)$$

Se reemplazan los diferentes términos en la ecuación (2) y se obtiene:

$$Ec(t) = \frac{1}{2}I_b \left(\frac{V}{R} \right)^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I_b \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}ms\dot{}^2 \quad (7)$$

La energía potencial es el resultado de la multiplicación de la masa, la gravedad y la altura:

$$Ep(t) = -mgh \quad (8)$$

Al reemplazar en la ecuación (1) la energía cinética y potencia se obtiene:

$$L(t) = \frac{1}{2}Ib(\dot{\theta}_x^2 + \dot{\theta}_y^2) + \frac{\dot{x}^2}{R^2} + \frac{\dot{y}^2}{R^2} + \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + (x\dot{\theta}_x + y\dot{\theta}_y)^2) + mg(x \sin(\theta_x) + y \sin(\theta_y)) \quad (9)$$

La ecuación (10) es conocida como Ecuación de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i \quad (10)$$

Se procede a desarrollar esta ecuación (10) en cada uno de los ejes (X,Y).

Para el eje X se tiene que la derivada parcial del Langrangiano respecto a x es:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = mg \sin(\theta_x) + mx\dot{\theta}_x^2 + my\dot{\theta}_x\dot{\theta}_y \quad (11)$$

La derivada parcial del Langrangiano respecto a la primera derivada de x es:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{Ib}{R^2}\dot{x} + m\dot{x} \quad (12)$$

La segunda derivada de la derivada parcial del Langrangiano respecto a la primera derivada de x es:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = \frac{Ib}{R^2}\ddot{x} + m\ddot{x} \quad (13)$$

Se reemplazan las ecuaciones (11) y (13) en la Ecuación de Euler-Lagrange (10):

$$\ddot{x} = \frac{mx\dot{\theta}_x^2 + my\dot{\theta}_x\dot{\theta}_y + mg \sin(\theta_x)}{\left(\frac{Ib}{R^2} + m \right)} \quad (14)$$

Para el eje Y se tiene que la derivada parcial del Langrangiano respecto a y es:

$$\frac{\partial L}{\partial y} = mg \sin(\theta_y) + my\dot{\theta}_y^2 + mx\dot{\theta}_x\dot{\theta}_y \quad (15)$$

La derivada parcial del Langrangiano respecto a la primera derivada de y es:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = \frac{Ib}{R^2}\dot{y} + m\dot{y} \quad (16)$$

La segunda derivada de la derivada parcial del Langrangiano respecto a la primera derivada de y es:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) = \frac{Ib}{R^2}\ddot{y} + m\ddot{y} \quad (17)$$

Se reemplazan las ecuaciones (15) y (17) en la Ecuación de Euler-Lagrange (10):

$$\ddot{y} = \frac{my\dot{\theta}_y^2 + mx\dot{\theta}_x\dot{\theta}_y + mg \sin(\theta_y)}{\left(\frac{Ib}{R^2} + m\right)} \quad (18)$$

3.2.2. Linealización y Simplificación del Modelo Matemático Las ecuaciones (14) y (18) presentan la dinámica de un sistema multivariable no lineal, el método de diseño escogido para el control PID requiere un modelo lineal, Ogata afirma que “Si se pretende obtener un modelo matemático de parámetros concentrados lineal (es decir, uno en el que se empleen ecuaciones diferenciales), siempre es necesario ignorar ciertas no linealidades y parámetros distribuidos que pueden estar presentes en el sistema dinámico”¹².

Con el fin de simplificar y linealizar el modelo matemático se aplican las siguientes aproximaciones (Ecuación (19)-(20)):

Si un ángulo está comprendido entre $\pm 8^\circ$ el resultado de la función seno del ángulo será aproximadamente el mismo argumento:

$$\sin(\theta) \simeq \theta \quad (19)$$

Como θ_x y θ_y son la entrada del sistema en el eje X y Y respectivamente, se consideran constantes, por lo tanto:

$$\dot{\theta}_x = 0, \dot{\theta}_y = 0 \quad (20)$$

Así, las ecuaciones (14) y (18) se reducen a las siguientes expresiones:

$$\ddot{x} = \frac{mg\theta_x}{\left(\frac{Ib}{R^2} + m\right)} \quad (21)$$

$$\ddot{y} = \frac{mg\theta_y}{\left(\frac{Ib}{R^2} + m\right)} \quad (22)$$

Al reemplazar la gravedad (g) y la inercia de la bola (Ib) en las ecuaciones (21) y (22) se obtiene:

$$\ddot{x} = 7\theta_x \quad (23)$$

$$\ddot{y} = 7\theta_y \quad (24)$$

¹² OGATA Katsuhiko. Ingeniería de Control Moderna. 5 edición. Madrid: Pearson Educación, 2010. p. 11.

Finalmente aplicando la transformada de Laplace a las ecuaciones anteriores:

$$Gx(s) = \frac{7}{s^2} \quad (25)$$

$$Gy(s) = \frac{7}{s^2} \quad (26)$$

Seguidamente se realiza la comparación entre el modelo no lineal y el modelo lineal simplificado, la validación se realiza en Simulink haciendo uso de diagramas de bloques.

Figura 8. Diagrama de bloques para el modelo no lineal, eje X

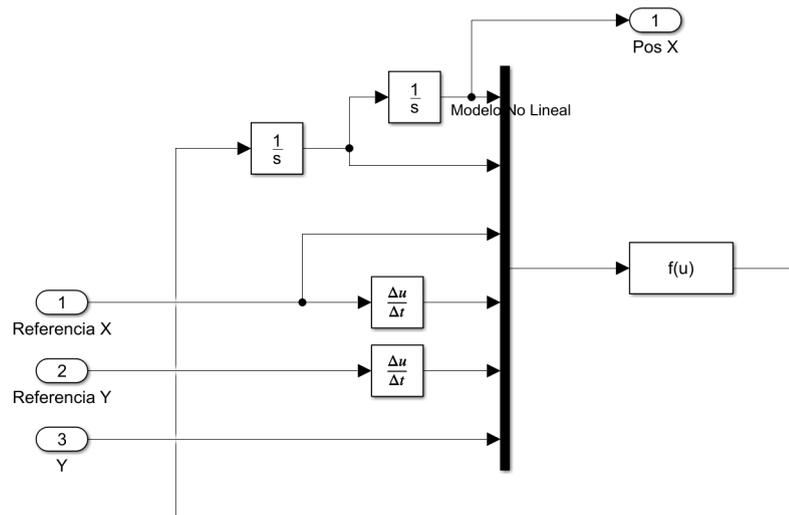
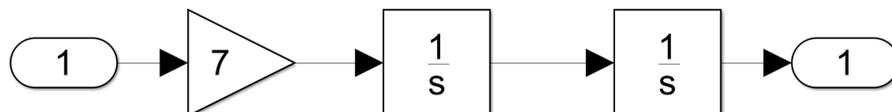
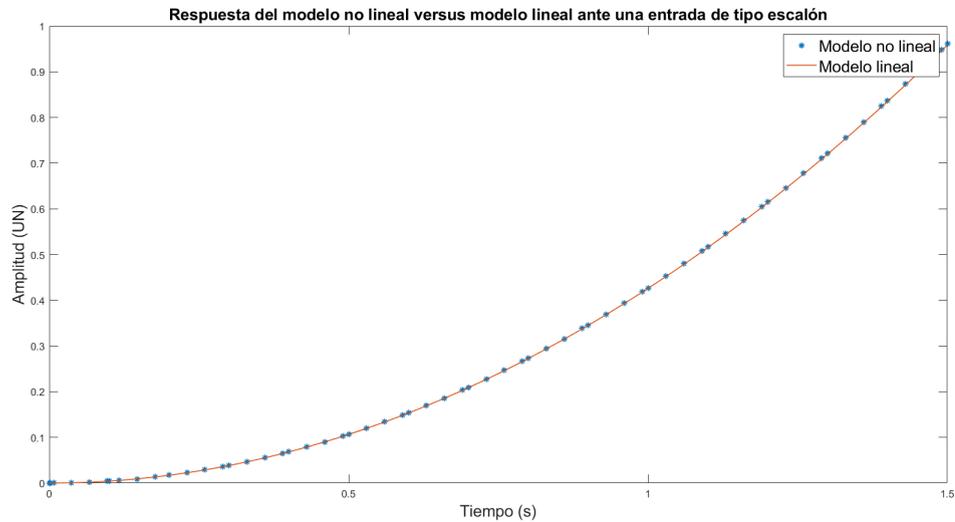


Figura 9. Diagrama de bloques para el modelo lineal



Las figuras (Figura 8 y 9) presentan la implementación de ambos modelos. Como se observa el modelo del eje X como del eje Y guardan similitud en su estructura, por lo tanto solo se ilustra la respuesta de uno de los ejes.

Figura 10. Respuesta del modelo lineal y no lineal ante una entrada de tipo escalón



En el gráfico (Figura 10) se observa que la respuesta obtenida con el modelo no lineal y con la aproximación lineal son casi idénticas lo que confirma la validez de la linealización y simplificación realizada.

3.2.3. Validación del modelo matemático Posteriormente se realiza la validación del modelo matemático frente a los datos reales entregados por el sistema, la inclinación del plato varía entre 0° y 7° , por ello, se escogió 4° como ángulo de inclinación para la validación del modelo matemático, para esto se realiza toma de datos en este punto de operación en ambos ejes del sistema Ball and Plate, proceso que se ilustra a continuación:

Figura 11. Datos tomados de la planta Ball and Plate y respuesta del modelo matemático original ante una entrada de 4 grados, eje X.

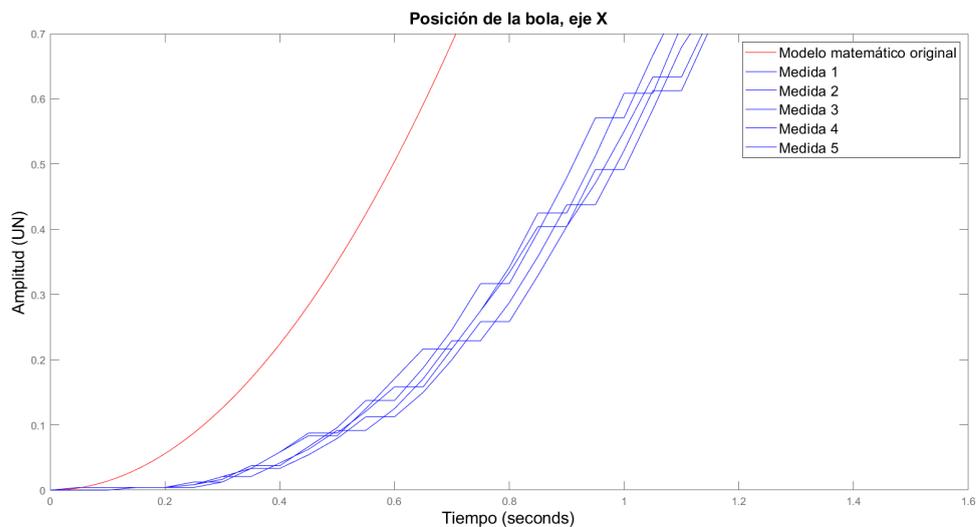
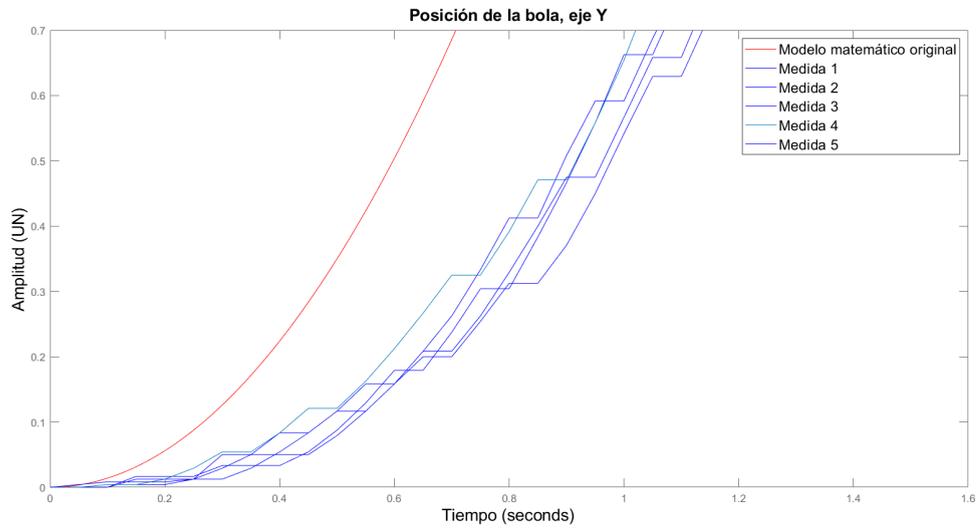


Figura 12. Datos tomados de la planta Ball and Plate y respuesta del modelo matemático original ante una entrada de 4 grados, eje Y.



En los dos gráficos (Figura 11 y 12) se observa que el modelo original se encuentra alejado de las mediciones tomadas del sistema Ball and Plate, esto se soluciona haciendo un ajuste de la ganancia del modelo del sistema, el resultado de este ajuste se presenta a continuación:

Figura 13. Datos tomados de la planta Ball and Plate y respuesta del modelo matemático ajustado ante una entrada de 4 grados, eje X.

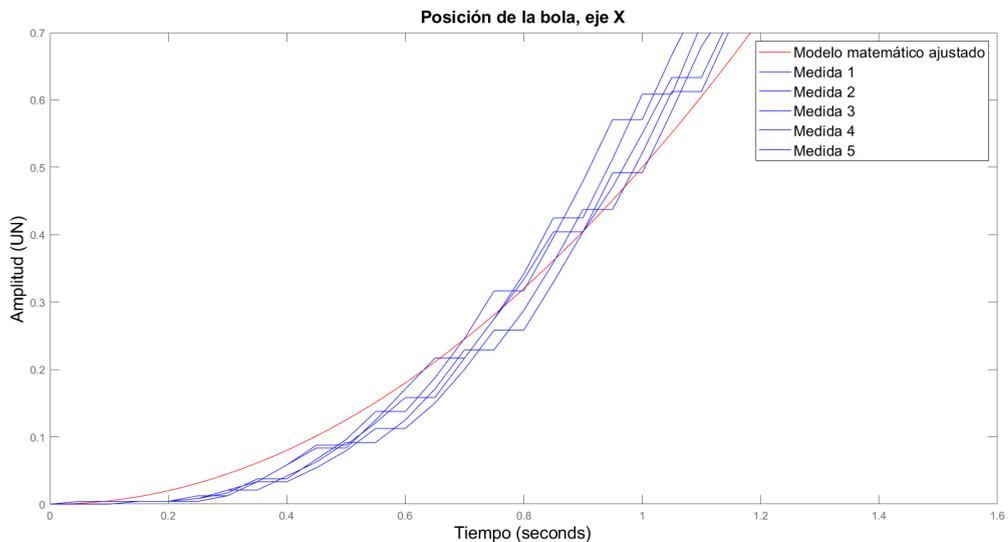
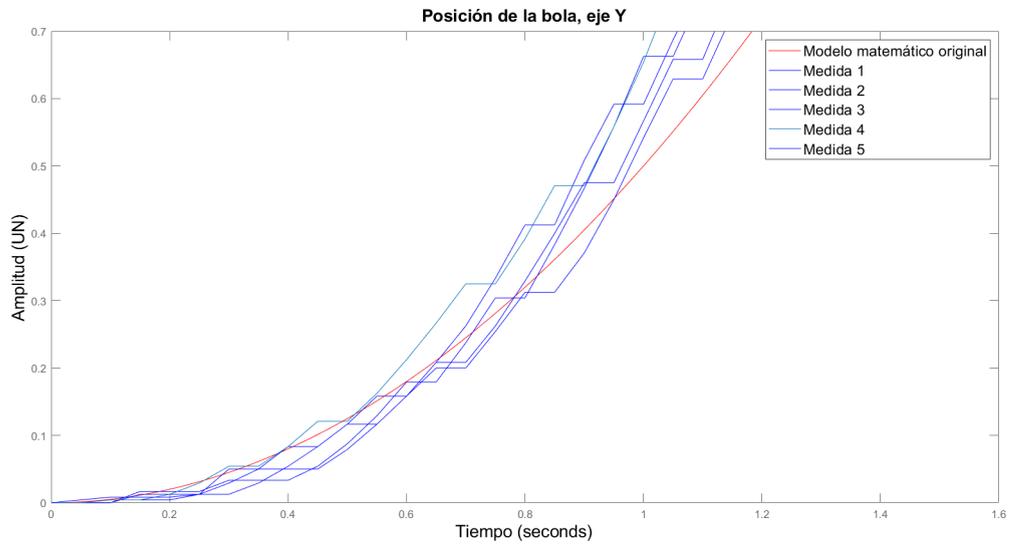


Figura 14. Datos tomados de la planta Ball and Plate y respuesta del modelo matemático ajustado ante una entrada de 4 grados, eje Y.



Ahora, si bien la respuesta del modelo matemático se ajusta mejor a las medidas realizadas después del ajuste de ganancias realizado, aún es necesario realizar un ajuste en la dinámica, dicho problema se soluciona agregando un filtro, este filtro proporciona los efectos de la fricción que fueron despreciados en el modelo matemático.

Figura 15. Respuesta del modelo matemático ajustado sin filtro y modelo matemático ajustado con filtro ante una entrada de 4 grados, eje X.

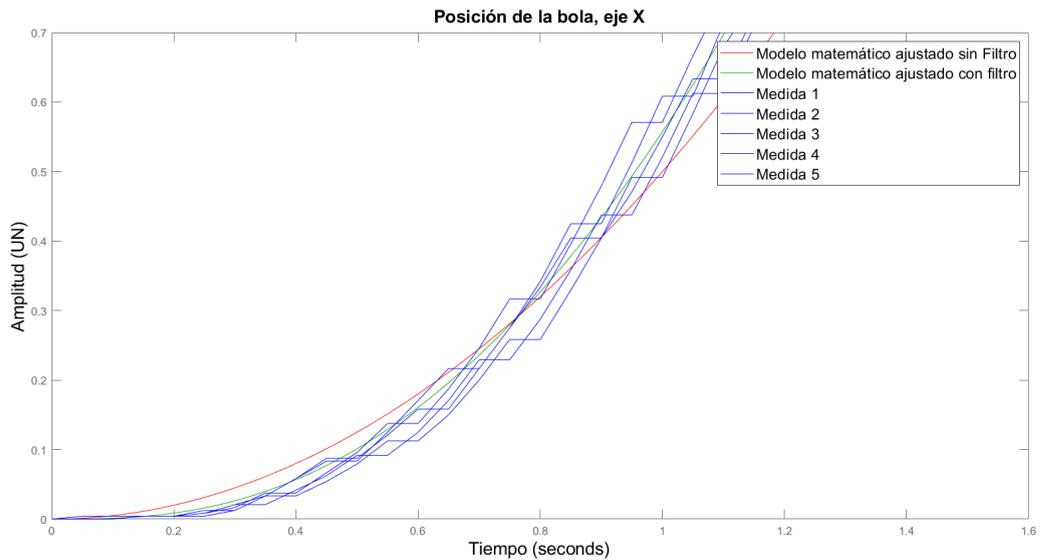
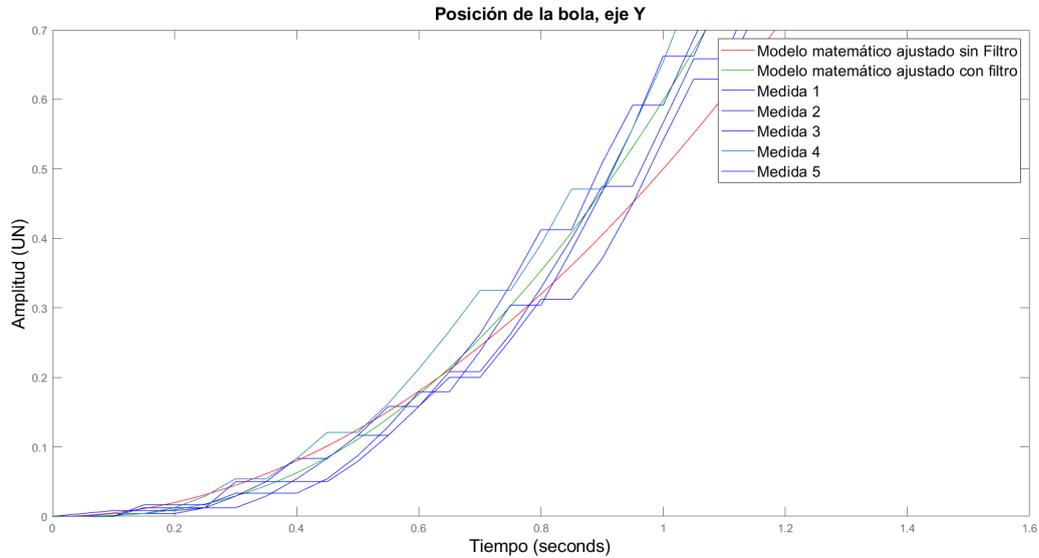


Figura 16. Respuesta del modelo matemático ajustado sin filtro y modelo matemático ajustado con filtro ante una entrada de 4 grados, eje Y.



Con la aplicación del filtro la respuesta del modelo del sistema se ajusta correctamente a los datos tomados del sistema, así que la función de transferencia que describe la dinámica de los ejes X y Y es:

$$Gx(s) = \frac{3.1}{0.2s^3 + s^2} \quad (27)$$

$$Gy(s) = \frac{3.1}{0.2s^3 + s^2} \quad (28)$$

3.3. DISEÑO DE LA INTERFAZ DE CONTROL

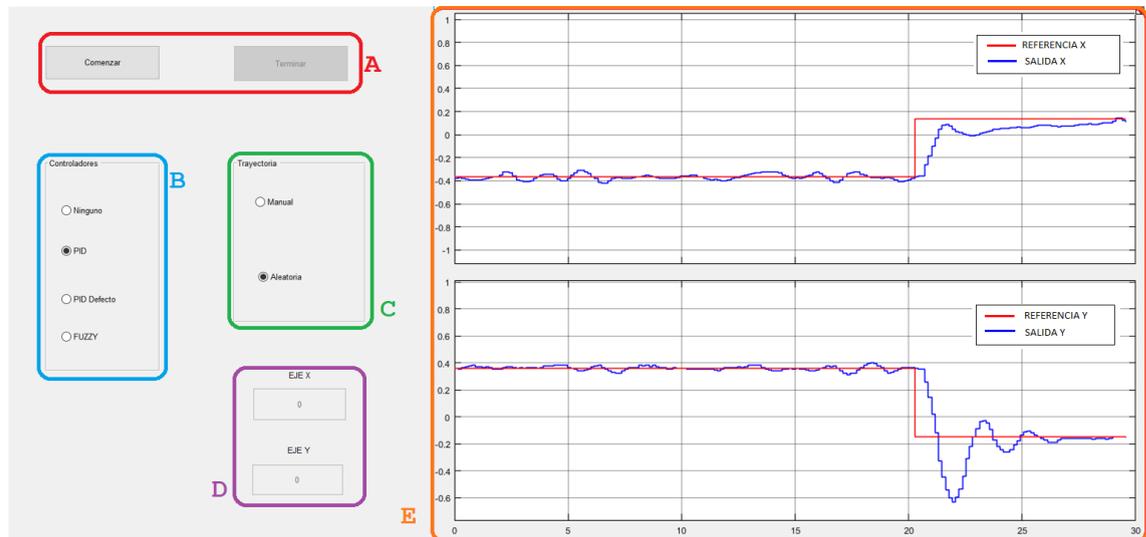
El diseño de la interfaz gráfica se realiza con ayuda del entorno de desarrollo "GUIDE", este entorno proporciona herramientas para el diseño de interfaces de usuario, a continuación, se presenta la interfaz diseñada para el sistema Ball and Plate y la explicación del funcionamiento de esta.

La gráfica anterior (Figura 17) fue dividida en cinco bloques, los cuales desempeñan funciones distintas.

Bloque A. Este bloque se compone de dos botones "Comenzar" y "Terminar", ellos se encargan de dar inicio ó finalizar la ejecución del sistema Ball and Plate, inicialmente sólo se encontrará habilitado el botón "Comenzar", el cual se desactivará cuando el sistema este siendo ejecutado, mientras que el botón "Terminar" sólo se activará cuando el sistema se esté ejecutando.

Bloque B. Compuesto de un grupo de botones que responde al nombre de "Controladores", cada botón representa cada uno de los tres controladores (PID, PID Defecto y *Fuzzy*), y un cuarto botón que permite al usuario operar el sistema sin

Figura 17. Interfaz gráfica diseñada con ayuda del entorno de desarrollo GUIDE.



ningún tipo de controlador.

Bloque C. Se compone de un grupo de botones que responde al nombre de "Traectoria", este bloque permite al usuario elegir el modo de trayectoria con la que opera el sistema, este puede ser "Manual" ó "Aleatorio", la opción "Manual" activa el bloque D, mientras que la opción "Aleatoria" asigna un número aleatorio entre -1 UN y 1 UN como referencia al sistema Ball and Plate, este número aleatorio cambia cada 40 segundos.

Bloque D. Al estar activada la opción "Manual" en el bloque C, permite al usuario asignar un número entre -1 UN y 1 UN en el eje X y Y como referencia al sistema Ball and Plate.

Bloque E. Permite al usuario observar la respuesta en tiempo real del sistema Ball and Plate, tanto en el eje X como en el Y, así como la referencia de ambos ejes.

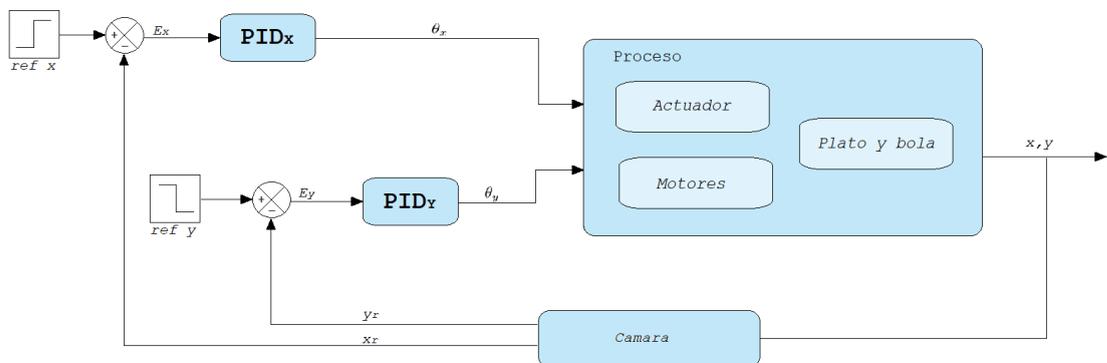
4. CONTROL PID

En este capítulo se realiza el diseño del controlador PID aplicado al sistema Ball and Plate “CE 151”, se nombran algunos conceptos básicos útiles para el diseño, así como la topología empleada.

4.1. GENERALIDADES

Como se evidenció en el capítulo 2, el sistema Ball and Plate puede controlarse como dos sistemas SISO, por lo tanto es necesario aplicar un controlador PID para cada uno de los ejes (X y Y).

Figura 18. Diagrama de bloques control PID.



- **Referencia (ref_x e ref_y):** Es un punto conocido en la superficie del plato, en el cual se pretende ubicar la bola mediante la aplicación del algoritmo de control.
- **Error (E_x e E_y):** Es la diferencia entre la referencia y la posición de la bola en el eje x e y sobre el plato en cada instante de muestreo. Sus unidades están dadas dentro del rango de -2 a 2 UN.
- **Señal de control (θ_x e θ_y):** Es la salida del controlador y corresponde a una medida proporcional del ángulo de inclinación del plato en cada uno de sus ejes. Esta señal es la que ingresa al actuador, el cual la transforma esta señal en los pulsos a aplicar a los motores y así lograr que el plato se mueva de manera adecuada para que la bola se desplace hasta la referencia.
- **Señal de salida (x e y):** Es la posición de la bola sobre el plato, esta medida es empleada para realizar la realimentación negativa el sistema. Se deduce a partir de la imagen entregada por la cámara y el posterior procesamiento de esta, el rango válido es desde -1 UN hasta 1 UN.

Las siguientes definiciones son tomadas de Ogata¹³, y proporcionan conceptos clave para entender el diseño de controladores PID.

- **Tiempo pico (t_p):** El tiempo pico es el tiempo requerido para que la respuesta llegue a la primer cresta de sobrepaso.
- **Sobreimpulso máximo (OS):** El sobreimpulso máximo es el valor máximo de la curva de respuesta medido a partir de la unidad. La cantidad de sobrepaso máximo (en porcentaje) indica en forma indirecta la estabilidad relativa del sistema.
- **Tiempo de establecimiento (t_s):** El tiempo de asentamiento es el primer requerido para que una curva de respuesta llegue y se quede dentro un rango alrededor del valor final de un tamaño especificado, en función de un porcentaje absoluto de valor final, por lo general 2%.

4.2. CONTROLADOR PID

El controlador PID consiste en la suma de una acción proporcional, integral y derivativa, cada una de estas acciones desempeña un rol distinto dentro del algoritmo de control y por lo tanto tienen ventajas y desventajas, estas son presentadas a continuación¹⁴:

Tabla 2. Ventajas y desventajas de las acciones proporcional, integral y derivativa.

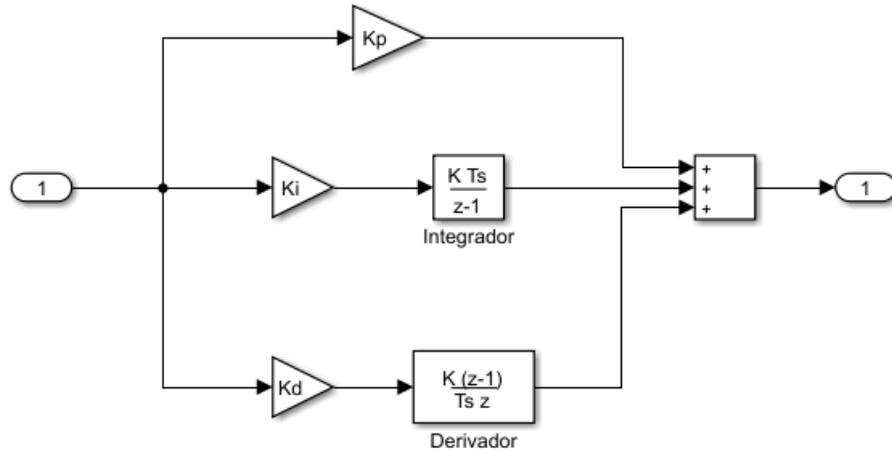
Acción	Ventaja	Desventaja
Proporcional	Aumenta la velocidad de respuesta del sistema y disminuye el error del sistema en régimen permanente.	Aumenta la inestabilidad del sistema.
Integral	Disminuye el error en estado estacionario, además proporciona robustez y minimiza la presencia de ruido en la respuesta del sistema.	Aumenta la inestabilidad del sistema y disminuye la velocidad de respuesta del sistema.
Derivativa	Aumenta la estabilidad del sistema y velocidad respuesta del sistema.	El error en estado estacionario permanece igual.

¹³ OGATA, Katsuhiko. Sistemas de Control en Tiempo Discreto. 2a edición. México: Prentice Hall Hispanoamerica, 1996. p.195

¹⁴ OGATA, Katsuhiko. Sistemas de Control en Tiempo Discreto. 2a edición. México: Prentice Hall Hispanoamerica, 1996. p.201

A continuación, se presenta el diagrama en bloques del algoritmo de control PID implementado en Simulink:

Figura 19. Diagrama de bloques del algoritmo de control PID.



Como se mencionó anteriormente el algoritmo de control PID se compone de la sumatoria de tres acciones tal como se ilustra en la figura 19, las constantes K_p , K_i y K_d se calculan con ayuda de un método de diseño, proceso que se explica en la siguiente sección.

4.3. PARÁMETROS DE DISEÑO DE CONTROLADORES

El método de diseño escogido para realizar el diseño del controlador PID es el de Lugar Geométrico de las Raíces (LGR), como el diseño se realizará en tiempo discreto, es necesario tener la función de transferencia que describe la dinámica del sistema Ball and Plate en tiempo discreto, dicho proceso involucra un tiempo de muestreo, a continuación, se presentan algunas ecuaciones útiles en el proceso de elección del tiempo de muestreo.

$$\zeta = \frac{\ln|OS|}{\sqrt{\ln|OS|^2 + \pi^2}} \quad (29)$$

$$OS = 100e^{\left(\frac{-\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)} \quad (30)$$

$$t_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} \quad (31)$$

$$\omega_s = \frac{2\pi}{T} \quad (32)$$

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \quad (33)$$

El ingeniero Ogata realiza la siguiente afirmación sobre el tiempo de muestreo, “Una regla práctica es muestrear de ocho a diez veces durante un ciclo de las

oscilaciones senoidales amortiguadas de la salida del sistema, si es que éste está subamortiguado”¹⁵, a pesar de que la respuesta del sistema Ball and Plate no es una respuesta de tipo subamortiguada, se tiene en cuenta esa consideración sobre el tiempo de muestreo, por lo tanto la relación entre ω_s (Ecuación (32)) y ω_d (Ecuación (33)) debe ser de al menos 10 muestras.

Basado en la anterior relación es posible determinar el tiempo máximo de muestreo, así:

$$T = \frac{2\pi}{10\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} \quad (34)$$

A continuación se presentan los diferentes tiempos de muestreo (T) obtenidos ante distintos valores de sobreimpulso (OS) y tiempo de establecimiento (t_s):

Tabla 3. Tiempo de muestreo para distintos valores de sobreimpulso y tiempo de establecimiento

Sobreimpulso (OS)	Tiempo de establecimiento (t_s)	Tiempo de muestreo (T)
25 %	12 seg	0.8318 seg
25 %	9 seg	0.6238 seg
25 %	6 seg	0.4159 seg
25 %	3 seg	0.2079 seg
20 %	12 seg	0.9657 seg
20 %	9 seg	0.7242 seg
20 %	6 seg	0.4828 seg
20 %	3 seg	0.2414 seg
15 %	12 seg	1.1383 seg
15 %	9 seg	0.8537 seg
15 %	6 seg	0.5691 seg
15 %	3 seg	0.2846 seg

El fabricante HUMUSOFT pone a disposición un controlador diseñado en el plano S y posteriormente muestreado con el tiempo que el usuario escoja, haciendo uso de este ejemplo se procede a aplicar tiempos de muestreo entre 0.1 y 0.2 segundos.

¹⁵ OGATA, Katsuhiko. Sistemas de Control en Tiempo Discreto. 2a edición. México: Prentice Hall Hispanoamerica, 1996. p.215

Tabla 4. Resultado al aplicar tiempos de muestreo entre 0.1 y 0.2 segundos.

Tiempo (s)	Observación
0.1	En las tres pruebas realizadas el computador sufrió congelamiento de imagen y posteriormente procedió a reiniciarse, se asume que el sistema de computo no es capaz de procesar la información en 0.1 segundos.
0.15	El sistema presenta buena respuesta ante cambios de la posición de la bola sobre el plato, corrigiendo rápidamente la inclinación del plato.
0.2	El sistema presenta buena respuesta ante cambios de la posición de la bola sobre el plato, sin embargo tarda más en responder en comparación a la respuesta usando 0.15 segundos.

De acuerdo con los resultados anteriores (Tabla 4), el tiempo de muestreo escogido es de 0.15 segundos, tiempo que no supera el tiempo máximo y garantiza que algoritmo pueda hacer correctamente la ejecución sin afectar el rendimiento de la CPU.

4.4. FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA EN TIEMPO DISCRETO

A continuación, se obtiene la función de transferencia en tiempo discreto, para ello se transforma la función de transferencia en tiempo continuo (27) y (28) a tiempo discreto empleando 0.15 segundos como tiempo de muestreo.

$$Gp(z) = \frac{0.007302z^2 + 0.02448z + 0.005063}{z^3 - 2.472z^2 + 1.945z - 0.4724} \quad (35)$$

La siguiente imagen presenta el lugar geométrico de las raíces de la función de transferencia del sistema en tiempo discreto (35):

Figura 20. Lugar geométrico de las raíces de la función de transferencia en tiempo discreto.

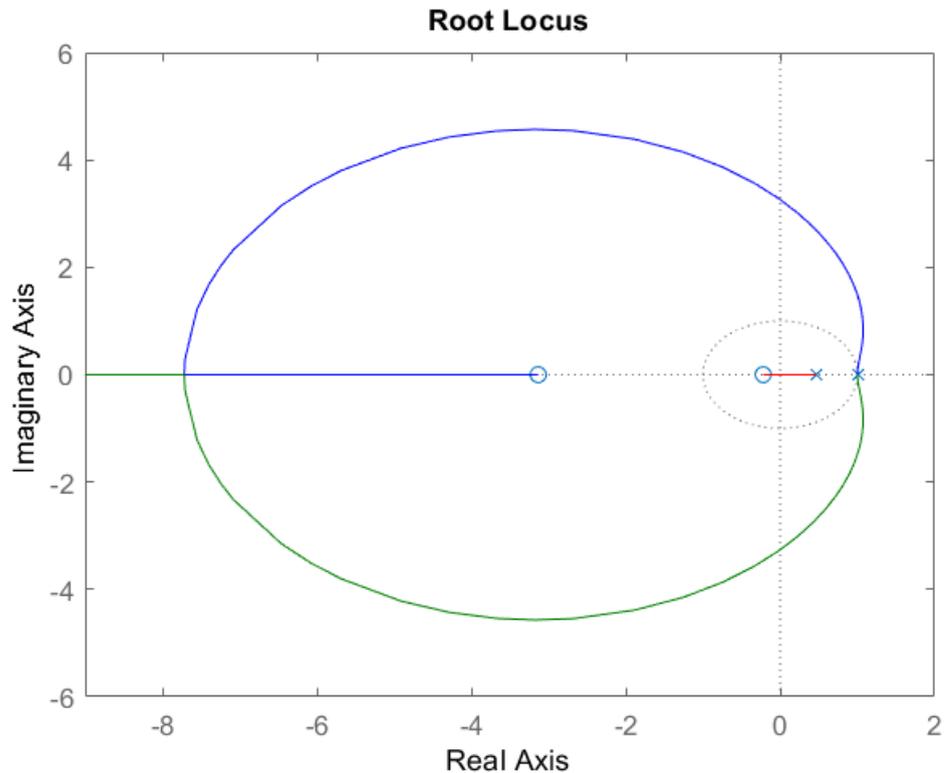


Tabla 5. Ubicación de polos y ceros.

	Número de elementos	Ubicación
Ceros	1	-3.1311
	1	-0.2214
Polos	1	0.4717
	2	$1.001 \pm 0.0337i$

Al observar la figura que contiene el lugar geométrico de las raíces de la función de transferencia en tiempo discreto (Figura 20) no se aprecia la existencia de ningún polo fuera del círculo unitario, sin embargo, la tabla anterior (Tabla 5) muestra la ubicación exacta de los polos y ceros, donde resalta la existencia de un par de polos complejos conjugados ubicados fuera del círculo unitario lo que causa la inestabilidad del sistema.

4.5. DISEÑO DE CONTROLADORES

A continuación, se realiza el diseño de controladores PID, es necesario atraer el par de polos complejos conjugados hacia dentro del círculo unitario, ya que estos son los causales de la inestabilidad del sistema, para el diseño de estos se hace uso de las ecuaciones (29) y (30), junto a las siguientes ecuaciones, que

proporcionan la posición del polo deseado del controlador:

$$|Z| = e^{-\zeta\omega_n T} \quad (36)$$

$$\angle Z = \omega_d T \quad (37)$$

Como se dijo anteriormente, se realizan varias propuestas de controladores que incluyen distintos valores de sobreimpulso (OS) y tiempo de establecimiento (t_s), en la siguiente tabla se consigna el aporte angular que debe realizar cada uno de los controladores PID para lograr que el lugar geométrico de las raíces pase por el polo deseado.

Tabla 6. Ubicación del polo deseado de los controladores PID

Sobreimpulso (OS)	T. Establecimiento (t_s)	Polo deseado	Cont. angular ¹
25 %	12 seg	0.9451 + 0.1076i	186.93
25 %	9 seg	0.9249 + 0.1408i	192.79
25 %	6 seg	0.8817 + 0.2033i	206.64
25 %	3 seg	0.7361 + 0.3585i	250.59
20 %	12 seg	0.9464 + 0.0927i	195.20
20 %	9 seg	0.9276 + 0.1214i	199.46
20 %	6 seg	0.8877 + 0.1755i	210.95
20 %	3 seg	0.7571 + 0.3116i	249.41
15 %	12 seg	0.9488 + 0.0787i	206.17
15 %	9 seg	0.9298 + 0.1031i	208.68
15 %	6 seg	0.8925 + 0.1492i	217.68
15 %	3 seg	0.7742 + 0.2662i	250.61

¹ Los ángulos están dados en grados

Un cero del controlador PID puede aportar máximo 90° por lo tanto un controlador PID puede aportar máximo 180° , al revisar la información de la última columna (Tabla 5), se observa que todos los ángulos son mayores a 180° , por lo tanto, los dos ceros del controlador se ubican en la coordenada real del polo deseado, para lograr el máximo aporte posible.

La ganancia del controlador (K), se obtiene aplicando la condición de magnitud (Ecuación (38)), los resultados se consignan en la siguiente tabla junto con la ubicación de los ceros del controlador.

$$K = \lim_{z \rightarrow p_d} \left(\frac{1}{|G_p(z)G_c(z)|} \right) \quad (38)$$

Tabla 7. Ubicación de ceros y ganancia K de controladores PID

PID	Polo deseado	Ubicación de ceros controlador	Ganancia (K)
1	$0.9451 + 0.1076i$	$(z-0.9451)(z-0.9451)$	1.7184
2	$0.9249 + 0.1408i$	$(z-0.9249)(z-0.9249)$	2.2878
3	$0.8817 + 0.2033i$	$(z-0.8817)(z-0.8817)$	3.4876
4	$0.7361 + 0.3585i$	$(z-0.7361)(z-0.7361)$	7.5594
5	$0.9464 + 0.0927i$	$(z-0.9464)(z-0.9464)$	1.6037
6	$0.9276 + 0.1214i$	$(z-0.9276)(z-0.9276)$	2.1445
7	$0.8877 + 0.1755i$	$(z-0.8877)(z-0.8877)$	3.2062
8	$0.7571 + 0.3116i$	$(z-0.7571)(z-0.7571)$	6.6177
9	$0.9488 + 0.0787i$	$(z-0.9488)(z-0.9488)$	1.5001
10	$0.9298 + 0.1031i$	$(z-0.9298)(z-0.9298)$	2.0360
11	$0.8925 + 0.1492i$	$(z-0.8925)(z-0.8925)$	3.0173
12	$0.7742 + 0.2662i$	$(z-0.7742)(z-0.7742)$	5.9587

Finalmente y para cumplir con la estructura de la Figura (19), se obtienen las constantes K_p, K_i y K_d de los controladores PID.

Tabla 8. Constantes K_p, K_i y K_d de los controladores PID

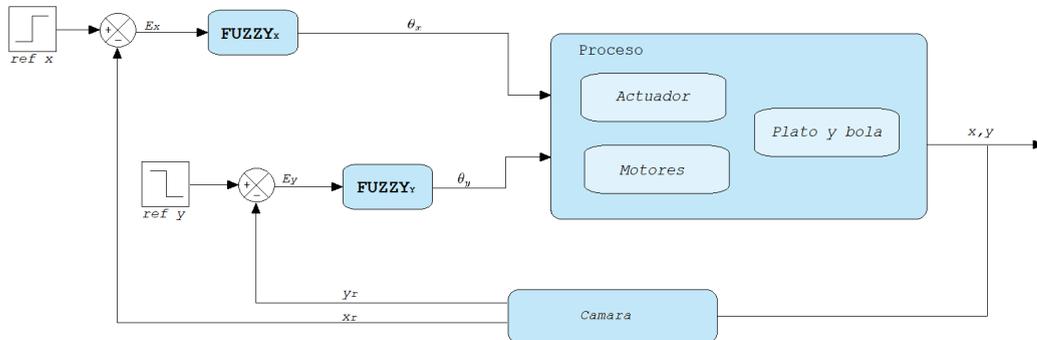
PID	K_p	K_i	K_d
1	0.1809	0.0026	1.5349
2	0.3243	0.0065	1.9571
3	0.7520	0.0244	2.7112
4	3.2002	0.2632	4.096
5	0.1656	0.0023	1.4364
6	0.2937	0.0056	1.8452
7	0.6595	0.0202	2.5268
8	2.6242	0.1943	3.7993
9	0.1477	0.0020	1.3504
10	0.2708	0.005	1.7606
11	0.5964	0.0174	2.4034
12	2.2352	0.1519	3.5716

La elección del mejor controlador PID se muestra en *Resultados y Análisis de resultados*.

5. CONTROL FUZZY

En este apartado se realiza el diseño del controlador *Fuzzy* aplicado al sistema Ball and Plate (Figura 21), se nombran algunos conceptos básicos útiles para el diseño, así como la topología empleada.

Figura 21. Diagrama de bloques control Fuzzy



5.1. GENERALIDADES

La lógica Fuzzy es un conjunto de principios matemáticos basados en grados de membresía o pertenencia, cuya función es modelar información. Este modelado se hace con base en reglas lingüísticas que aproximan una función mediante la relación de entradas y salidas del sistema. La lógica Fuzzy utiliza enunciados que no son ni totalmente ciertos ni completamente falsos y se aplica a expresiones que pueden tomar un valor de veracidad de todo un conjunto de valores comprendidos entre dos extremos, la verdad absoluta y la falsedad total.¹⁶

Las siguientes definiciones son tomadas de Diciembre¹⁷

- **Universo de discurso:** el conjunto X de todos los posibles valores que puede tomar determinada variable x .
- **Función de membresía o de pertenencia:** (μ_A) es una aplicación que indica el grado de pertenencia de un valor a dicho conjunto fuzzy, matemáticamente se expresa así:

$$\mu_A(x) : \mathbb{X} \longrightarrow [0, 1] \quad (39)$$

¹⁶ ALMACHE, Juan. Lógica clásica y lógica difusa: Facetas que las caracterizan. En: Estoa, Vol., 1 No2,(2013); p.91-101 ISSN 1390-9274

¹⁷ DICIEMBRE, Samuel. Sistemas de control con lógica Difusa: Métodos de Mamdani y de Takagi-Sugeno-Kang(TSK). Castellón de la Plana, 2017, 73p. Trabajo de investigación (Matemático computacional). Universitat jaume.

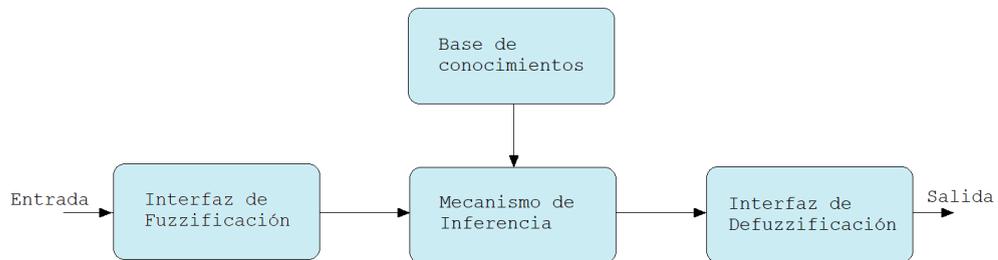
- **Conjunto fuzzy:** Es un conjunto que puede contener elementos de forma parcial, es decir, que la propiedad de que un elemento x pertenezca al conjunto A ($x \in A$) puede ser cierta con un grado parcial de verdad. Así pues un conjunto fuzzy puede definirse de la siguiente manera:

$$A = (x, \mu_A(x)) : x \in X, \mu_A(x) : \mathbb{X} \longrightarrow [0, 1] \quad (40)$$

- **Variable lingüística:** Se denomina variable lingüística a aquella que puede tomar por valor términos del lenguaje natural, como mucho, poco, positivo, negativo, que son las palabras que desempeñan el papel de etiquetas en un conjunto borroso.
- **Reglas Fuzzy:** Las reglas *Fuzzy* combinan uno o más conjuntos *Fuzzy* de entrada, llamados antecedentes o premisas, y les asocian un conjunto borroso de salida, llamado consecuente o consecuencias. Los conjuntos *Fuzzy* se asocian mediante lógicas conjuntivas como y, o. Una regla típica, de tipo IF-THEN, para un sistema de control sería “Si error es positivo-pequeño y derivada de error es negativo-pequeño Entonces acción es positiva-pequeña”.

Un sistema basado en reglas *Fuzzy* está compuesto por cuatro partes principales, las cuales se ilustran a continuación:

Figura 22. Estructura de un sistema basado en reglas fuzzy



Interfaz de fuzzificación Esta etapa se encarga de medir los valores de las variables de entrada para realizar un mapeo a escala que transfiere el rango de valores de las variables a un universo de discurso Fuzzy, es decir la fuzzificación ó fusicación, convierte los datos de entrada en variables lingüísticas.

Base de conocimientos La base de conocimientos contiene toda la información de la aplicación que se va a controlar. Consta de una base de datos y una base de reglas lingüísticas para controlar la variable. La base de datos proporciona las definiciones para el establecimiento de reglas y la manipulación de datos difusos. La base de reglas caracteriza las metas de control y la política que utilizan los expertos para llevar a cabo el control, empleando proposiciones.

Mecanismo de inferencia La lógica utilizada para tomar decisiones dentro de un controlador difuso es el núcleo del mismo. A partir de la misma se simula la lógica que utilizan las personas para tomar decisiones, con base en conceptos difusos y en la inferencia de acciones de control, empleando implicaciones y las reglas establecidas según la base de conocimientos.

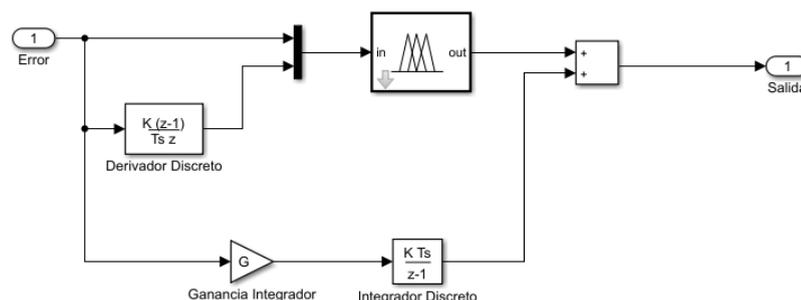
- **Inferencia de Mamdani:** Utiliza un conjunto de reglas difusas “SI-ENTONCES”. Toma como entrada los valores de la fuzzificación y se aplican a los antecedentes de las reglas difusas. Si una regla tiene múltiples antecedentes, se utiliza el operador AND u OR para obtener un único número que presente el resultado de la evaluación.
- **Inferencia de Takagi-Sugeno-Kang:** Se trata de un método basado en reglas difusas pero en el que el consecuente no entrega un conjunto difuso sino una serie de funciones lineales. Este modelo es útil para sistemas complejos. La principal diferencia que presenta el método TSK respecto al de Mamdani es que no es necesario realizar un proceso de defuzzificación. Esto se debe al hecho de que no se obtiene ningún conjunto difuso si no un conjunto de funciones lineales.

Interfaz de Defuzzificación La interfaz de defuzzificación ó defusificación se encarga del mapeo a escala que convierte el rango de valores de las variables de salida a sus universos de discurso correspondientes. La desdifusificación es la herramienta para obtener la acción de control nítida a partir de una acción de control difusa.

5.2. CONTROL FUZZY

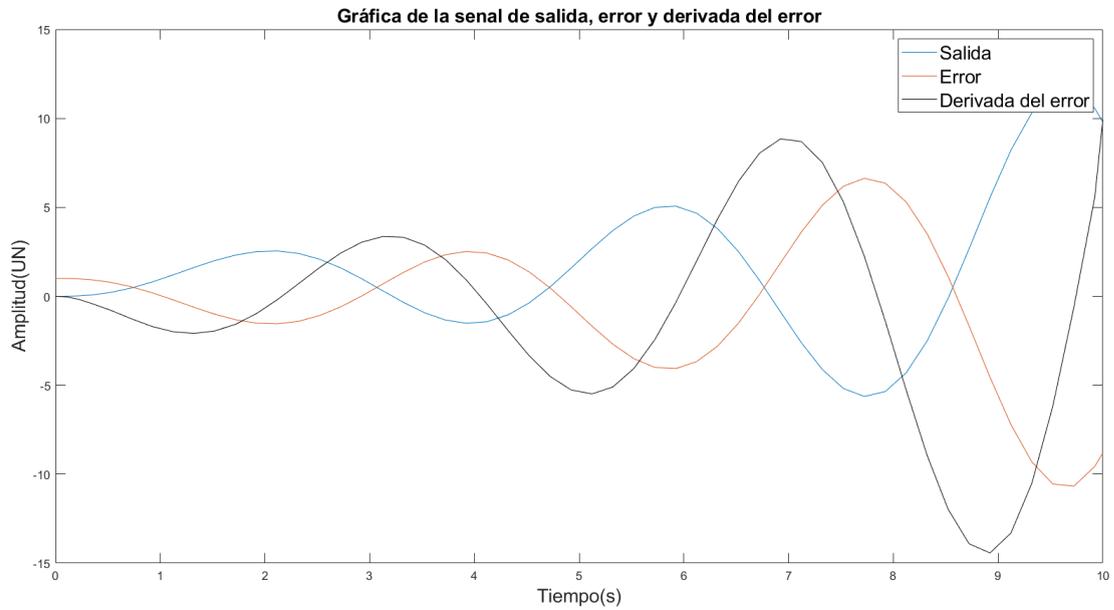
Para el diseño del controlador *Fuzzy* se definen como entradas del sistema de inferencia, el error producto de la diferencia entre la referencia y la salida del sistema, y la derivada del error, adicionalmente se agrega una acción integral con el fin de eliminar el error en estado estacionario, como se ilustra a continuación:

Figura 23. Topología del controlador *Fuzzy*.



La acción integral del controlador *Fuzzy* está acompañada de una ganancia de 0.025, esta se aplica en ambos sistemas de inferencia.

Figura 24. Señal de salida, error y derivada del error.



La derivada del error proporciona una estimación futura de cómo será el comportamiento del error del sistema, como se aprecia en la figura anterior (24), la derivada del error (señal de color amarillo) alcanza su valor pico cuando la señal de error (señal de color rojo) es cero, de igual forma, la derivada del error es capaz de predecir cuando el error incrementará la magnitud de su valor.

Posteriormente se procede a definir los conjuntos *Fuzzy* de la entrada del controlador, estas entradas se aplican al controlador de tipo Mamdani y Sugeno, debido a que su interfaz de fuzzificación funciona de igual forma.

Tabla 9. Conjunto *Fuzzy* de la entrada 1

Nombre	Error
Universo de discurso	[-1.45,1.45] UN
Variables lingüísticas	errornegativo, errorpositvo
Regla sintáctica	sigmoidal

Figura 25. Conjunto Fuzzy para el error.

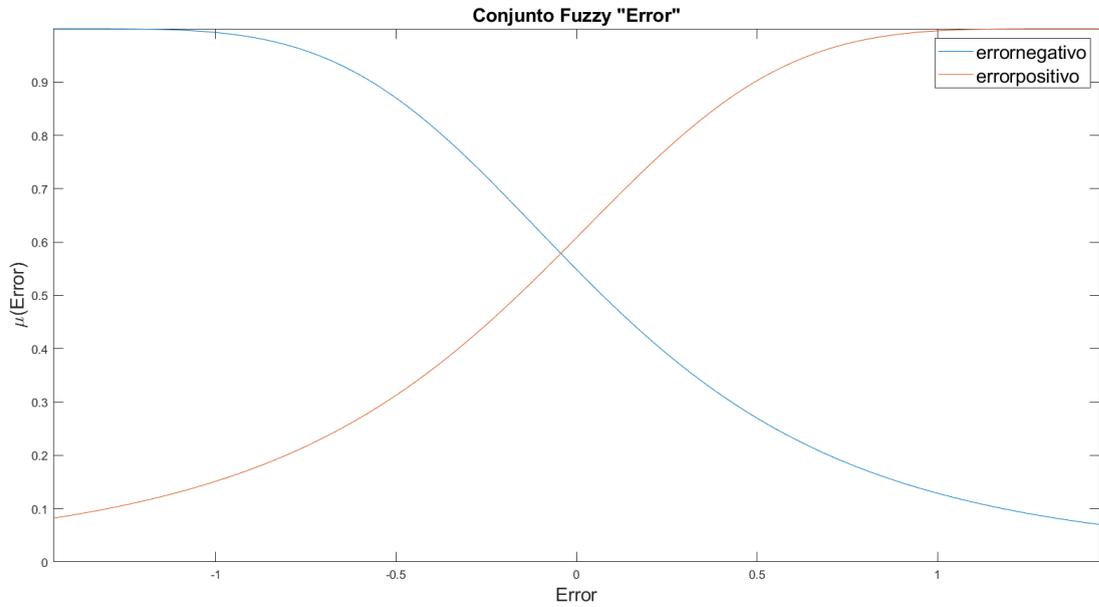
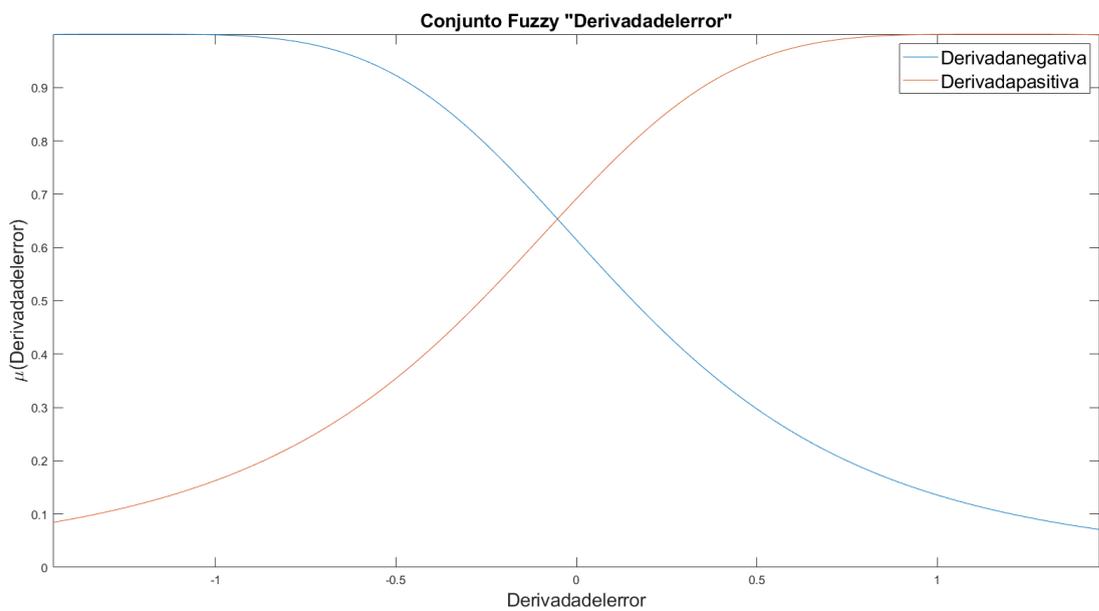


Tabla 10. Conjunto *Fuzzy* de la entrada 2

Nombre	Derivada del error
Universo de discurso	$[-1.45, 1.45]$ UN
Variables lingüísticas	derivadanegativa, derivadapositiva
Regla sintáctica	sigmoidal

Figura 26. Conjunto Fuzzy para la derivada del error.

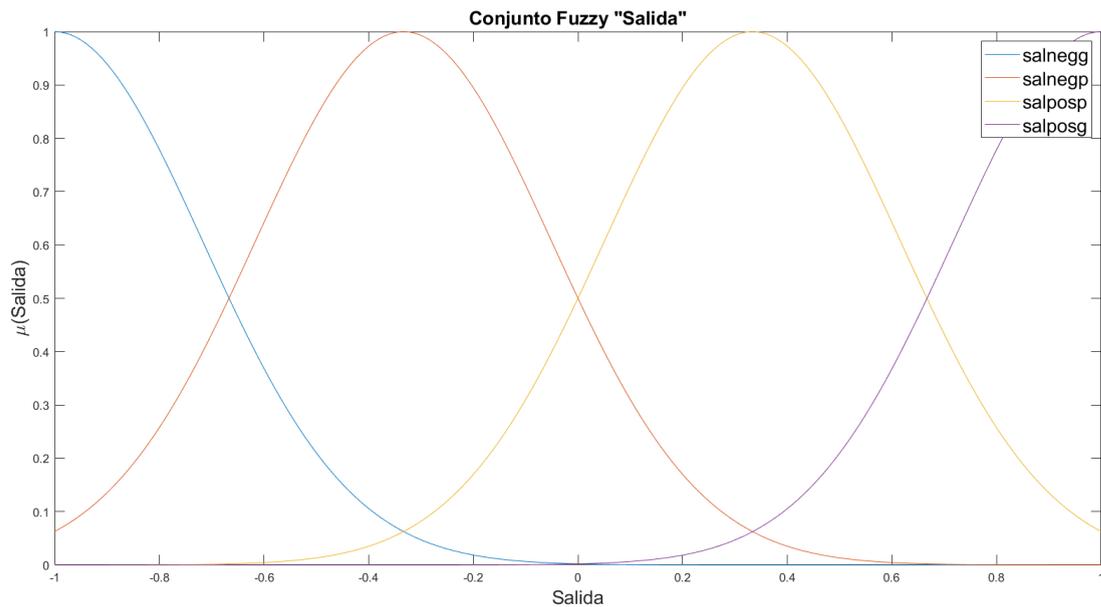


La salida del controlador haciendo uso del mecanismo de inferencia Mamdani está dado por el siguiente conjunto *Fuzzy* :

Tabla 11. Conjunto *Fuzzy* de la salida empleando sistema de inferencia Mamdani

Nombre	Salida
Universo de discurso	[-1,1] Proporcional a grados
Variables lingüísticas	salnegg, salnegp, salposp, salposg
Regla sintáctica	gaussmf

Figura 27. Conjunto Fuzzy para la salida del controlador.

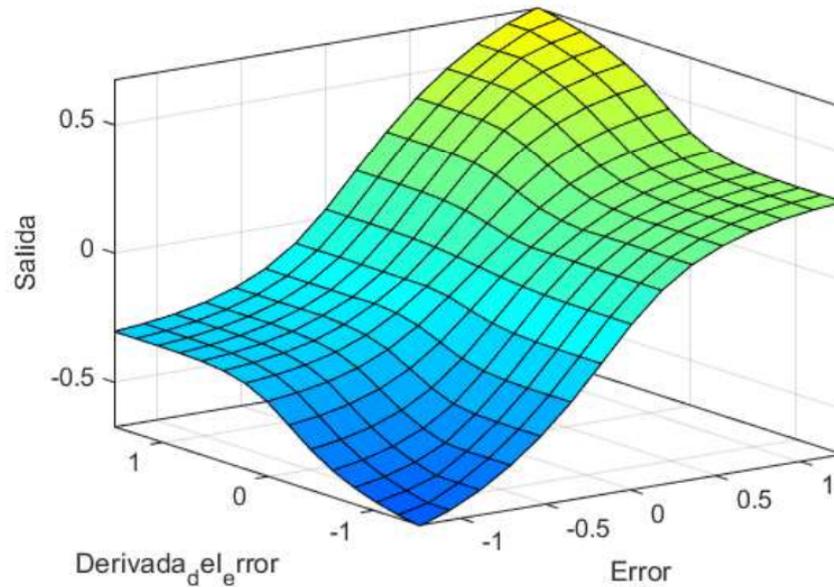


Las base de reglas lingüísticas para este controlador ésta dado por las siguientes expresiones:

- Si *Error* es *errornegativo* y *Derivadadelerror* es *derivadanegativa* entonces *Salida* es *salnegg*
- Si *Error* es *errornegativo* y *Derivadadelerror* es *derivadapositiva* entonces *Salida* es *salnegp*
- Si *Error* es *errorpositivo* y *Derivadadelerror* es *derivadanegativa* entonces *Salida* es *salposp*
- Si *Error* es *errorpositivo* y *Derivadadelerror* es *derivadapositiva* entonces *Salida* es *salposg*

La curva de control del controlador *Fuzzy* usando sistema de inferencia Mamdani se ilustra a continuación:

Figura 28. Curva de control del controlador *Fuzzy* Mamdani.



La diferencia entre los sistemas de inferencia Mamdani y Takagi-Sugeno-Kang se aprecia en la salida del sistema ya que la inferencia Takagi-Sugeno-Kang tiene un valor único, como se aprecia en la siguiente tabla:

Tabla 12. Conjunto *Fuzzy* de la salida empleando sistema de inferencia Sugeno

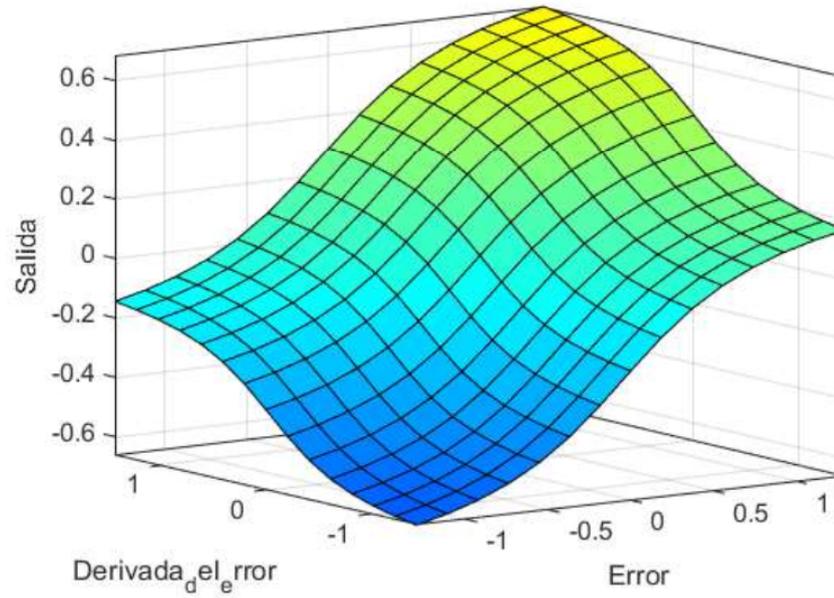
Nombre	Salida
Universo de discurso	$[-1,1]$ Proporcional a grados
Variables lingüísticas	salnegg, salnegp, salposp, salposg
Regla sintáctica	constante

Las base de reglas lingüísticas para este controlador está dado por las siguientes expresiones:

- Si *Error* es *errornegativo* y *Derivadadelerror* es *derivadanegativa* entonces *Salida* es *salnegg*
- Si *Error* es *errornegativo* y *Derivadadelerror* es *derivadapositiva* entonces *Salida* es *salnegp*
- Si *Error* es *errorpositivo* y *Derivadadelerror* es *derivadanegativa* entonces *Salida* es *salposp*
- Si *Error* es *errorpositivo* y *Derivadadelerror* es *derivadapositiva* entonces *Salida* es *salposg*

La curva de control del controlador *Fuzzy* usando sistema de inferencia Sugeno se ilustra a continuación:

Figura 29. Curva de control del controlador *Fuzzy* Sugeno.



La elección del mejor controlador Fuzzy se muestra en *Resultados y Análisis de resultados*.

6. RESULTADOS Y ANÁLISIS DE RESULTADOS

En este capítulo se presentan los resultados de este trabajo de investigación, se seleccionan los mejores controladores PID y *Fuzzy* los cuales son comparados entre sí, junto con un tercer controlador entregado por el fabricante, las pruebas incluyen seguimiento a referencia y pruebas de robustez.

6.1. SELECCIÓN DE CONTROLADORES

Para escoger el mejor controlador PID y *Fuzzy* diseñado se lleva a cabo el siguiente procedimiento, se someten los doce controladores PID y los dos controladores *Fuzzy* a pruebas que involucran referencias aleatorias, posteriormente se obtiene los valores RMSE (Raíz del Error Cuadrático Medio), útil para medir la cantidad de error que hay entre dos conjuntos de datos, es decir el error entre la referencia y la salida real del sistema.

A continuación, se presentan los resultados para los controladores PID, los respuestas de los controladores 4, 8 y 12 no fueron tenidas en cuenta debido a que sus resultados no fueron concluyentes, los resultados fueron divididos en dos grupos para facilitar la visualización de las respuestas.

Figura 30. Resultados de los controladores PID 1,2,3,5 y 6

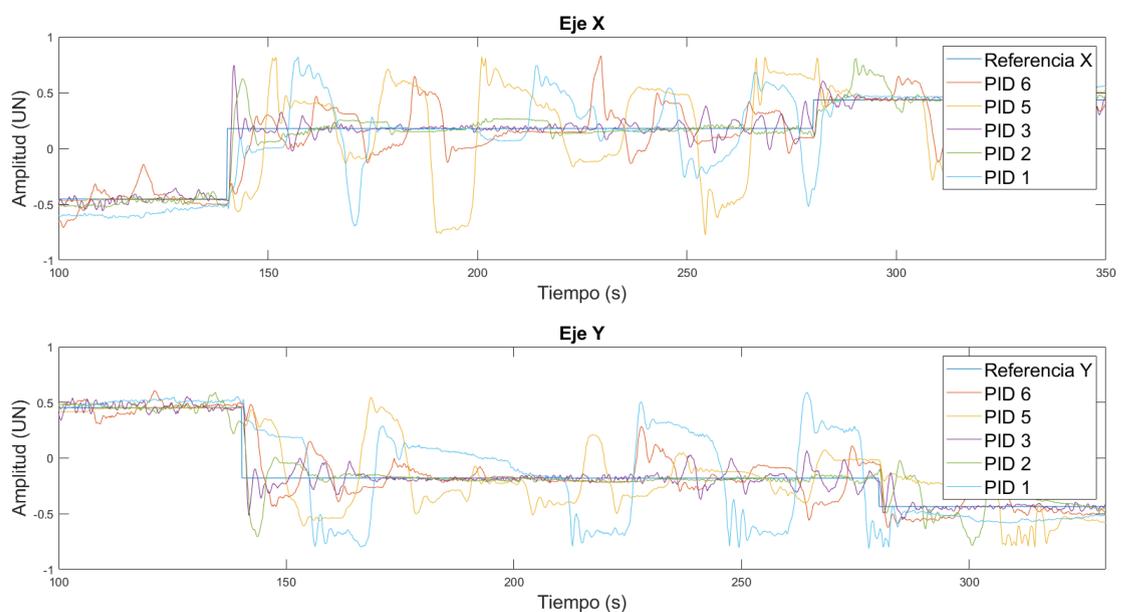


Figura 31. Resultados de los controladores PID 7,9,10,11 y 12

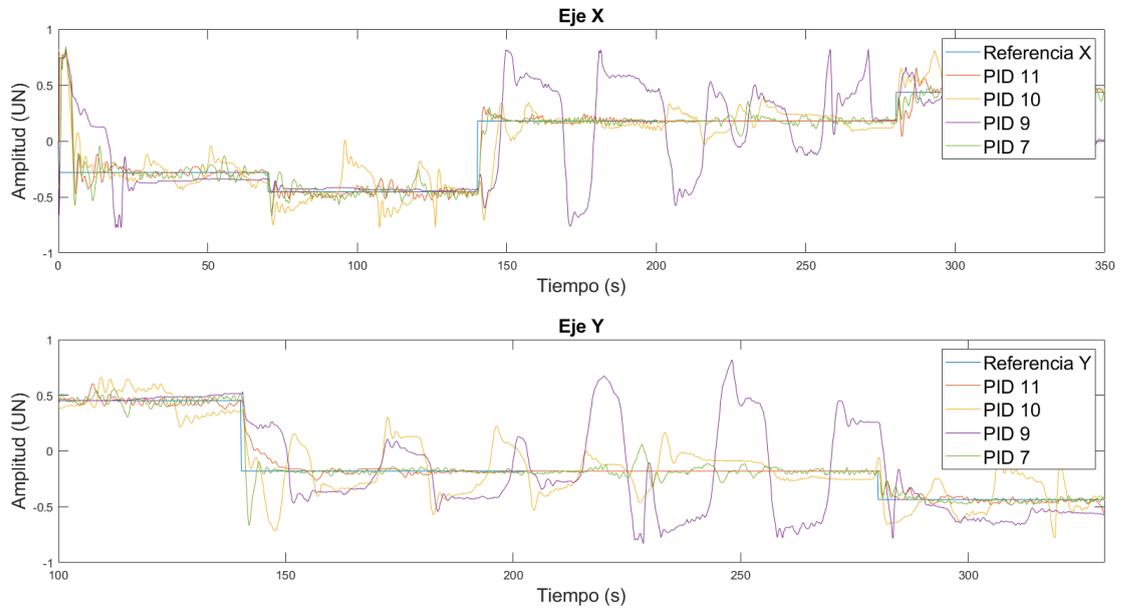
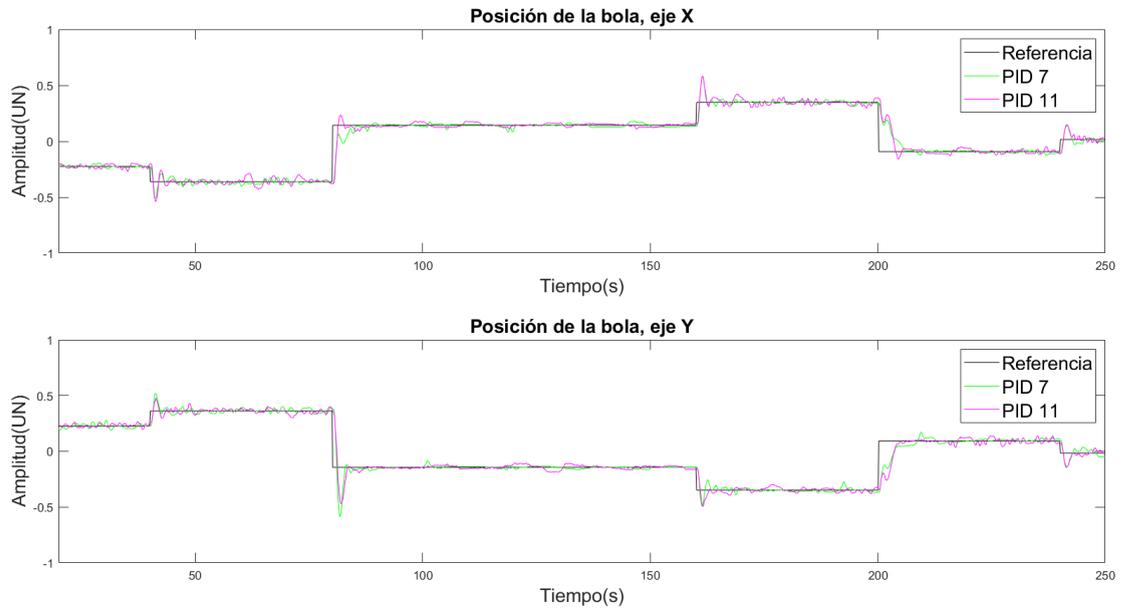


Tabla 13. Valor RMSE de los 12 controladores PID diseñados

PID	Eje X	Eje Y
1	0.2431	0.2445
2	0.0858	0.0813
3	0.0753	0.0639
4	0.2130	0.2297
5	0.2978	0.2505
6	0.1636	0.1260
7	0.0593	0.0615
8	0.345	0.334
9	0.3063	0.1547
10	0.1583	0.1767
11	0.0616	0.0711
12	0.3040	0.3120

De los resultados anteriores, destacan los valores RMSE de los controladores 7 y 11, cuyos resultados son ilustrados a continuación:

Figura 32. Resultados de los controladores PID 7 y 11



Se aprecia que ambos controladores presentan buen desempeño, logrando que la bola siga la referencia, sin embargo el controlador PID 7 presentó menor valor de RMSE, es decir sus datos de salida presentan menor error, al revisar la tabla (Tabla 8), se observa que las constantes K_p , K_i y K_d de los controladores son similares, lo que explica el resultado cercano de la respuesta de los controladores, el controlador PID 7 cuenta con una acción integral (K_i) 16% mayor en comparación al controlador PID 11, por esta razón el controlador 7 cuenta con menor ruido en su respuesta, y por lo tanto, el controlador 7 es escogido como el mejor controlador PID diseñado.

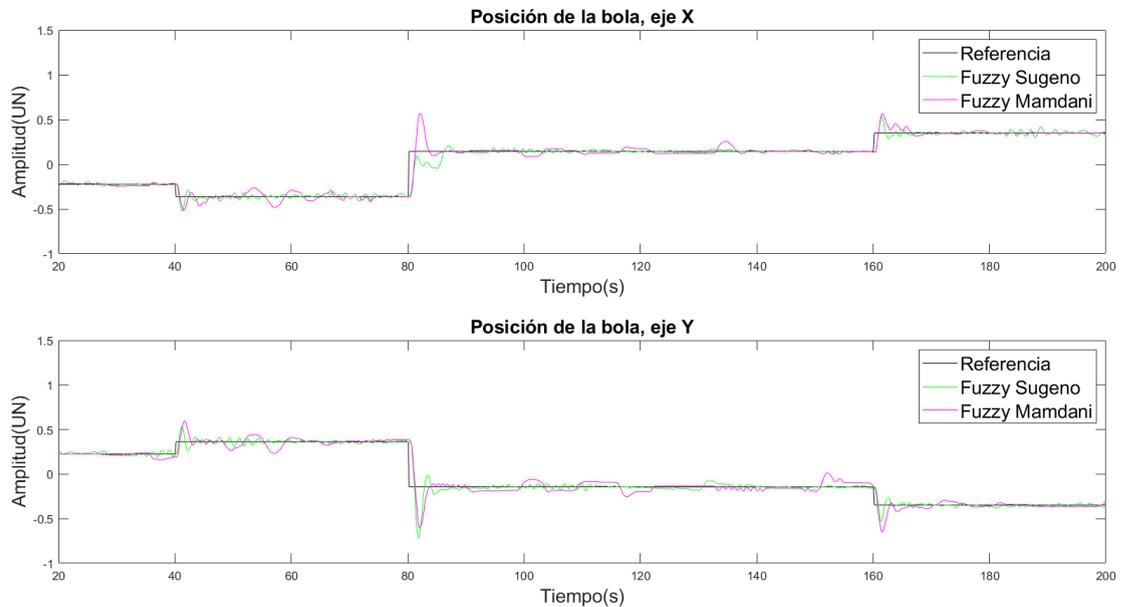
El proceso se repite para los controladores diseñados con lógica Fuzzy empleando sistema de inferencia Mamdani y Sugeno, los valores RMSE son registrados en la siguiente tabla:

Tabla 14. Valor RMSE de los 2 controladores Fuzzy diseñados

Sistema de inferencia	Eje X	Eje Y
Mamdani	0.0998	0.0941
Sugeno	0.0503	0.0591

Las diferencias en los valores RMSE de los controladores Fuzzy son evidentes, gráficamente también pueden observarse las diferencias, como se evidencia en la siguiente figura:

Figura 33. Resultados de los controladores Fuzzy empleando sistema de inferencia Mamdani y Sugeno



Gracias a los resultados presentados se determina que el mejor controlador Fuzzy diseñado es el que emplea sistema de inferencia Sugeno, una particularidad de este algoritmo es su menor consumo computacional comparado con el Mamdani, teniendo en cuenta que ambos controladores cuentan con igual acción integral, mismos conjuntos *Fuzzy* en sus entradas y curva de control muy similar, se presume que el consumo computacional es el principal causante en la diferencia de rendimiento de los controladores *Fuzzy*.

6.2. SEGUIMIENTO A REFERENCIA

Ahora que se tienen los mejores diseños de controladores PID y Fuzzy, junto con el suministrado por el fabricante, se someten a más pruebas de seguimiento a distintas referencias, esto permitirá conocer el rendimiento de los controladores en distintos puntos de operación y poder determinar elementos como, sobreimpulso (%) y tiempo de establecimiento (s), así poder realizar un análisis en el dominio temporal; los resultados obtenidos con los tres controladores se resumen a continuación:

En la gráfica (Figura 34) se aprecia que todos los controladores logran el objetivo principal que es hacer que la bola siga la referencia eliminando el error en estado estacionario, sin embargo los controladores PID y *Fuzzy* presentan un mejor desempeño con respecto al PID por defecto. Para efectos de simplificación en el análisis se escoge el segmento desde 160 a 200 segundos como se muestra a continuación:

Figura 34. Resultados de los controladores PID, Fuzzy y PID por defecto

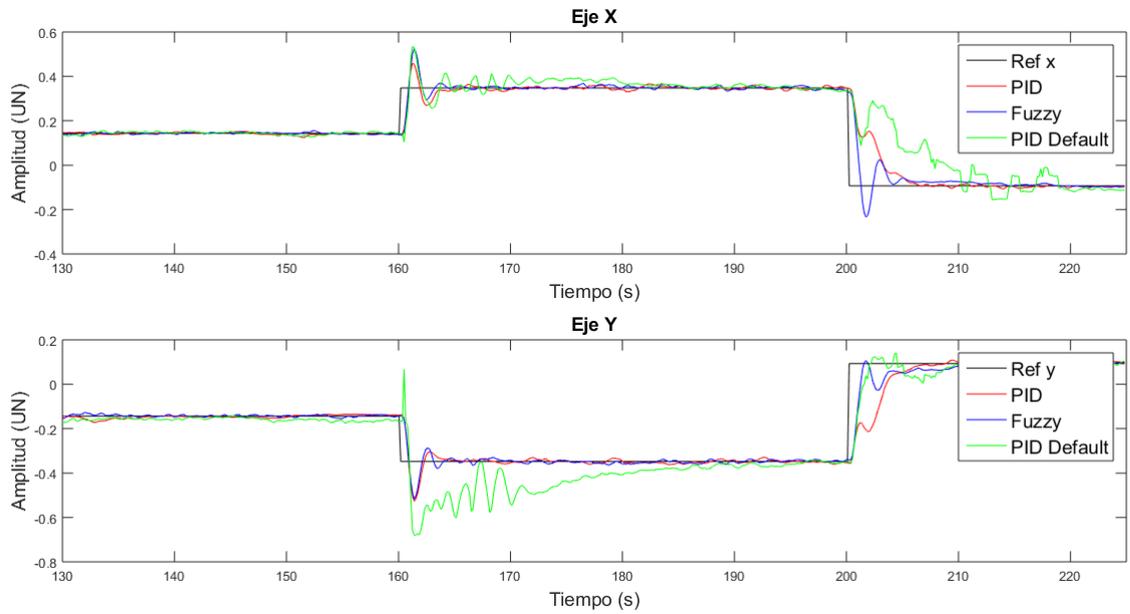


Figura 35. Segmento de los resultados de los controladores PID, Fuzzy y PID por defecto

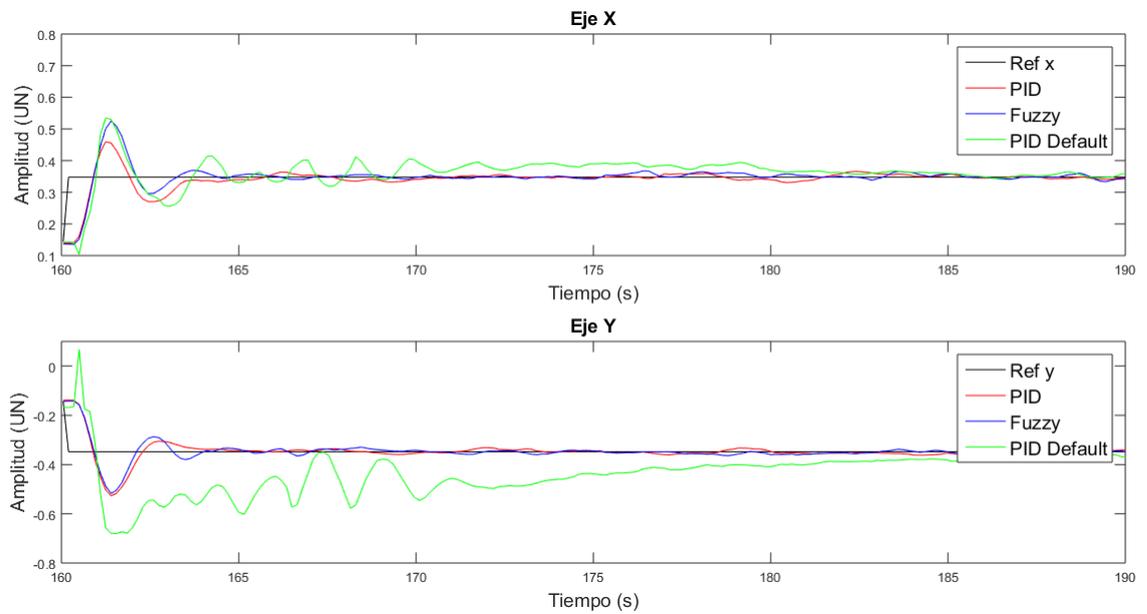


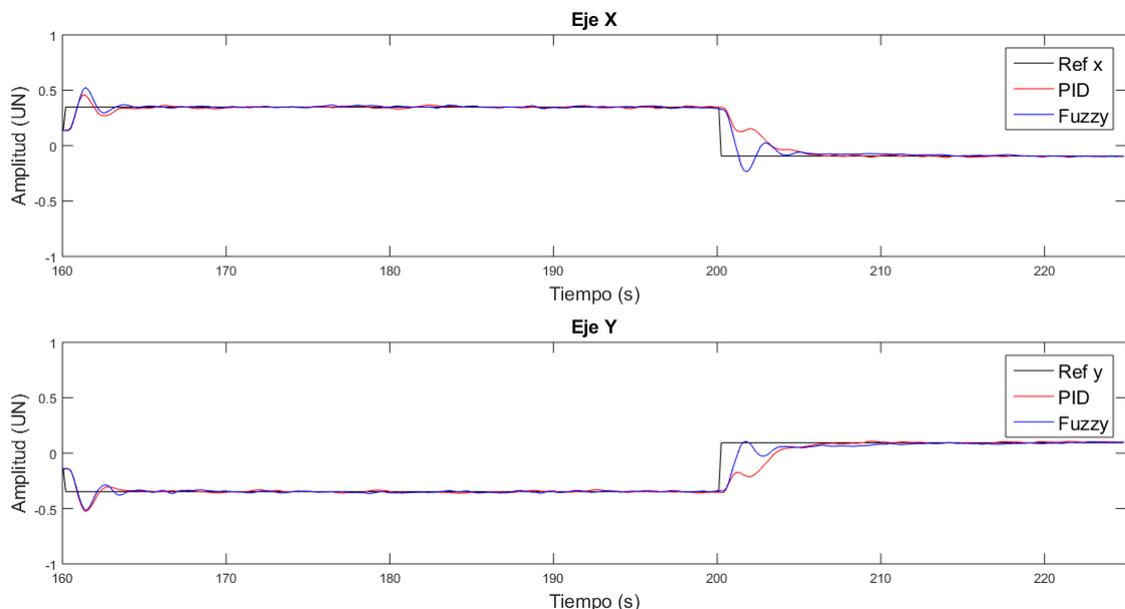
Tabla 15. Parametros de interes de los controladores PID, Fuzzy y PID por defecto

Controlador	Sobreimpulso (%)		Tiempo de establecimiento (s)	
	Eje x	Eje y	Eje x	Eje y
PID	42.045	54.796	3.85	2.75
Fuzzy	50.733	46.745	2.25	2.066
PID default	64.11	61.31	4.6	7.16

En la gráfica (Figura 35) y la tabla (Tabla 15) se evidencia que el controlador PID por defecto tiene bastante sobreimpulso y su respuesta es muy lenta a comparación con los controladores PID y *Fuzzy* los cuales tienen una respuesta similar, sin embargo el controlador Fuzzy es 34.6% más rápido que el controlador PID, y presenta tan sólo un 10% más de sobreimpulso.

Debido al buen rendimiento de los controladores PID y *Fuzzy* diseñados, se presenta una respuesta que ilustra el rendimiento de los controladores en otro punto de operación.

Figura 36. Respuesta del controlador PID vs controlador *Fuzzy* en distintos puntos de operación

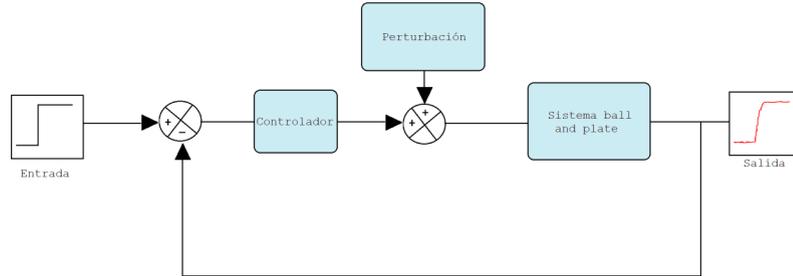


En la ilustración (Figura 36) muestra como el controlador PID tiene cambios en su respuesta transitoria, esto se debe a que el controlador PID está trabajando fuera del punto de operación para el cual fue diseñado, caso contrario al controlador *Fuzzy* que presenta un mismo comportamiento sin importar el punto de operación.

6.3. ROBUSTEZ DE LOS CONTROLADORES

Para probar la robustez de los controladores se realizan dos experimentos, el primero consiste en introducir una señal entre el controlador y la planta de la siguiente forma:

Figura 37. Diagrama de bloques con perturbación al sistema



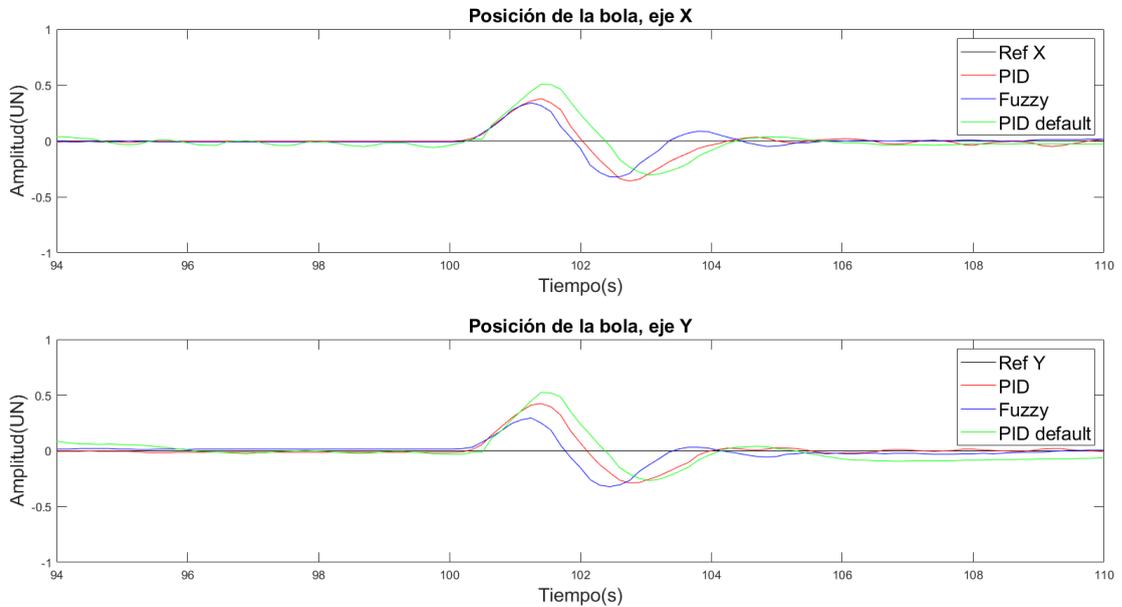
La ventaja de realizar el experimento de esta forma es que la señal es totalmente conocida y la prueba es repetitiva, de esta forma se emula el comportamiento del sistema ante un movimiento externo en el plato, los resultados obtenidos se muestran a continuación:

Tabla 16. Prueba de robustez de los controladores PID, Fuzzy y PID por defecto

Controlador	Amplitud promedio(UN)		Tiempo promedio (s)	
	Eje x	Eje y	Eje x	Eje y
PID	0.39717	0.39165	3.7777	3.65833
Fuzzy	0.34582	0.34116	4.10277	4.00833
PID default	0.46686	0.44766	4.62777	4.52777

Se puede apreciar que los tres controladores logran rechazar la perturbación introducida al sistema, (Figura 38), al controlador PID proporcionado por el fabricante le toma más tiempo rechazar la perturbación y la posición alcanzada por la bola es mayor en comparación a los otros dos controladores, por otro lado, en promedio de ambos ejes, el controlador PID rechaza la perturbación en 9.0788 % menos tiempo, a costa de esto, la posición de la bola es 14.8182 % mayor en comparación al controlador *Fuzzy*; al comparar la acción integral con la que cuentan los controladores, se obtiene que la del controlador *Fuzzy* es 23.762 % mayor que la acción integral del controlador PID, uno de los efectos de una buena acción integral es proporcionar mayor robustez al sistema, por ello la bola alcanza una posición menor con el controlador *Fuzzy*.

Figura 38. Respuesta del tres controladores ante una perturbación



El segundo experimento consiste en el cambio de la bola por una de mayor masa e igual diámetro, este cambio muestra el rendimiento del controlador ante cambios futuros en la dinámica de la planta, la fricción es proporcional a la masa, por lo tanto, aumentar la masa de la bola produce un cambio en la dinámica de la bola sobre el plato.

Con la nueva bola se realizan nuevas pruebas de seguimiento a referencia empleando las mismas referencias, los promedios de los valores RMSE de los tres controladores con la bola original y la bola de mayor masa se muestran en la siguiente tabla.

Tabla 17. Valor RMSE promedio de los tres controladores, utilizando la bola por defecto

	PID	Fuzzy	PID Defecto
Eje X	0.0551	0.0510	0.0955
Eje Y	0.0569	0.0536	0.0957

Tabla 18. Valor RMSE promedio de los tres controladores, utilizando la bola de mayor masa

	PID	Fuzzy	PID Defecto
Eje X	0.0645	0.06205	0.12455
Eje Y	0.08205	0.07155	0.09955

Como es de esperar los valores RMSE de la tabla 18 sufrieron incrementos en comparación con los resultados de la tabla 17, los resultados del controlador

PID diseñado sufrieron un incremento del 28.596%, los del Fuzzy 27.724% y los del controlador PID proporcionado por el fabricante 17.207%, a pesar del menor incremento en los valores RMSE del controlador PID suministrado por el fabricante no se considera un buen resultado, de por sí, sus valores ya eran bastante altos antes del cambio de la bola en comparación a los valores RMSE de los otros controladores.

7. CONCLUSIONES

Se demostró mediante la comparación de datos reales que el análisis matemático y las simplificaciones realizadas para obtener el modelo que describe la dinámica del sistema Ball and Plate resultaron ser acertadas; por otro lado, a pesar de que el sistema Ball and Plate cuenta con dos grados de libertad se evidenció que estos se pueden aproximar a dos sistemas SISO.

El método escogido para el diseño e implementación del controlador clásico PID fue el de Lugar Geométrico de las Raíces (LGR), si bien, este método no es aplicado por los principales autores de teoría de control a dinámicas inestables como la del sistema Ball and Plate, quedó demostrado que es posible lograr buenos resultados al aplicarlo en este tipo de dinámicas.

Se diseñó e implementó de manera exitosa un sistema de control basado en lógica *Fuzzy* para el sistema Ball and Plate de la Universidad Surcolombiana, el sistema de inferencia empleado fue el de Sugeno, puesto que presentó mejores resultados en comparación a su homólogo Mamdani, esto se debe al mayor costo computacional que involucra este último algoritmo; quedó demostrado que no es necesario un gran número de funciones de membresía para lograr una buena respuesta, puesto que ambos controladores se contruyeron con dos funciones de membresía en las entradas y cuatro en la salida.

La comparación de los parámetros de desempeño del controlador PID, *Fuzzy* y un tercer controlador PID suministrado por el fabricante HUMUSOFT, arrojó que los controladores diseñados tienen mejor desempeño que el controlador proporcionado por el fabricante, el controlador *Fuzzy* presentó una respuesta similar en los distintos puntos de operación, mientras que el controlador PID mostró una dependencia a este debido a su diseño lineal, en pruebas de robustez, el controlador *Fuzzy* demostró ser más robusto que los otros controladores; empleando esta lógica, la bola alcanzó menos amplitud, obtuvo menores valores RMSE en sus datos de salida y presentó menores variaciones en los datos al introducir un cambio en la dinámica de la planta.

La lógica *Fuzzy* resultó útil para el diseño de controladores, su diseño resultó más simplificado en comparación al algoritmo de control PID que necesitó del modelo matemático del sistema Ball and Plate para su elaboración, a costa de esto el diseño de controladores *Fuzzy* requiere un estudio riguroso del funcionamiento del sistema a aplicarse, conocer las especificaciones técnicas y comportamiento del sistema Ball and Plate permitió la correcta aplicación de la lógica *Fuzzy* producto de la buena elección de las variables lingüísticas, universo de discurso, reglas sintácticas y base de reglas del sistema de inferencia; por otro lado, la elección del *hardware* donde será implementado el sistema de inferencia *Fuzzy* es fundamental, es bien sabido que el costo computacional que implican la utilización de esta lógica es mayor a la de lógicas convencionales, por ello es

importante escoger un dispositivo que cuente con las características de rendimiento apropiadas.

El *software* MatLab demostró ser útil para el diseño y prueba de sistemas con lógica *Fuzzy*, su herramienta *FuzzyLogicDesigner* proporcionó una forma totalmente intuitiva y agradable para este proceso, de igual forma, la integración entre este programa y el sistema Ball and Plate, permitió implementar los controladores en su entorno de programación visual *Simulink*, gracias al desarrollo de los *drivers* por parte del fabricante HUMUSOFT; por otro lado GUIDE permitió la creación de una interfaz gráfica agradable al usuario, que permitió observar la posición de la bola, elección de la trayectoria y el controlador a utilizar en tiempo real, todo esto de forma intuitiva y sencilla; a pesar de esto MatLab no es una aplicación idónea para aplicaciones en tiempo real debido a su alto costo computacional, sus creadores reconocen esto y por ello ofrecen la posibilidad de exportar diseños a otros lenguajes.

El sistema Ball and Plate presenta una dinámica totalmente distinta a las dinámicas de los otros sistemas de control existentes en el laboratorio, lo que supuso un reto adicional para este trabajo de investigación, esto permitió afianzar y aplicar conocimiento adquiridos a lo largo del proceso formativo en la universidad, especialmente en el área de instrumentación y control, a pesar de que este sistema es un modelo educativo, la dinámica que presenta es similar a la de otros sistemas industriales como servos especiales o sistemas de control de posicionamiento de antenas; sin duda, este trabajo de grado planteó las bases para la realización de trabajo futuro y aprovechar al máximo el potencial con el que cuenta este sistema.

8. RECOMENDACIONES

Para esta investigación se seleccionó un punto de operación del sistema a fin de obtener un controlador clásico; gracias a la gran cantidad de topologías que es posible implementar con lógica *Fuzzy* se puede implementar un controlador de tipo *gain scheduling* y realizar un análisis no lineal del sistema Ball and Plate; de igual forma estos algoritmos de control pueden ser implementados por medio de Redes Neuronales como lógica de control.

Es posible aplicar otras técnicas de control como algoritmos predictivos y adaptativos, la Universidad Surcolombiana cuenta con la electiva profesional "Control predictivo y adaptativo", de forma que existen los recursos académicos para investigar sobre este tema.

La tendencia día tras día converge a realizar investigaciones utilizando software libre, ahora que se conoce el funcionamiento técnico del sistema Ball and Plate, es posible adaptar el funcionamiento del sistema a otras plataformas, a su vez, esto permitirá aumentar las aplicaciones, como almacenar información en la nube, realizar la construcción de aplicaciones móviles para el sistema o el diseño de controladores, usando otros lenguajes de programación como *Python*, *C++* o *Java*.

BIBLIOGRAFÍA

ALMACHE, Juan. Lógica clásica y lógica difusa: Facetas que las caracterizan. En: *Estoa*, Vol., 1 No2,(2013); p.91-101 ISSN 1390-9274.

ALPASLAN, Yildiz. GOREN-SUMER Leyla. Stabilizing of Ball and Plate System Using an Approximate Model. En: *IFAC*, Vol., 50 No1 (Jul.2017); p. 9601-9606.

BONIFACIO, Martín del Brío. MOLINA, Alfredo. *Redes Neuronales y Sistema Borrosos*. 3a Edición. México: Alfaomega, 2011. 440 p. ISBN: 978-970-15-1250-0.

DICIEMBRE, Samuel. *Sistemas de control con lógica Difusa: Métodos de Mamdani y de Takagi-Sugeno-Kang(TSK)*. Castellon de la Plana, 2017, 73p. Trabajo de investigación (Matemático computacional). Universitat Jaume.

HLADKY, Vratislav. LISCINSKY, Pavol. Control de Laboratorio de Modelo Plato y Bola. En: *Transfer inovácii*, Vol., 26 (2013); p. 209-214.

HUMUSOFT, [En línea], Disponible en: <https://www.humusoft.cz>

HUNDE, Andinet Negash. *Design Of Fuzzy Sliding Mode Controller For The Ball and Plate System*, Etiopia, 2013, 105p. Trabajo de investigación (Magister de ciencias en Ingeniería Electrónica). Addis Ababa University. Department of Electrical and Computer Engineering.

MEENAKSHIPRIYA, B. KALPANA Kannan. Modelling and Control of Ball and Beam System using Coefficient Diagram Method (CDM) based PID controller. En: *IFAC*, Vol., 47 No1, (2014); p. 620-626.

MORIONES Edna Carolina. *Diseño, implementación y control de sistema de balance ball and plate*. En: *SENNOVA*, Vol., 2 No2, (2016); p.135-149.

OGATA, Katsuhiko. *Ingeniería de Control Moderna*. 5 edición. Madrid: Pearson Eduacion, 2010. 904 p. ISBN 978-84-8322-660-5.

OGATA, Katsuhiko. *Sistemas de Control en Tiempo Discreto*. 2a edición. México: Prentice Hall Hispanoamerica, 1996. 757 p. ISBN 968-880-539-4.

PENCO, José Jorge. MODESTI, Mario Roberto. *Control difuso vs PID para un sistema de bola y plataforma*. [En línea]
Disponible en <http://ria.utn.edu.ar/handle/123456789/2562>.

SPACEK, Lubos. *Digital Control of CE 151 Ball and Plate Model*. Zlin, 2016, 71p, Trabajo de investigación (Magister en control automático e informática). Universidad Tomase Bati ve Zline, Facultad de aplicaciones informáticas.

SPONG, Mark.HUTCHISON, Seth. VIDYASAGAR, M. Robot Dynamics and Control. 2a edición. 2004. 303 p.

ANEXOS

Anexo A. Datos técnicos del sistema Ball and Plate

Ítem	Descripción
Fabricante	HUMUSOFT
Dimensión del cuerpo	0.43 x 0.43 x 0.2 metros
Dimensión del plato	0.4 x 0.4 metros
Longitud de la varilla	1.1 metros
Peso	9 kilogramos
Fuente de poder DC	32V, 100W
Movimiento del plato	Motores paso y poleas
Sensor de posición de la bola	Cámara CCD con interfaz USB

Anexo B. Aproximación de ángulo pequeño

La siguiente tabla muestra el porcentaje de error de la aproximación de ángulo pequeño al comparar el valor del argumento de la función con el valor exacto.

Ángulo (x)	Ángulo (x)	$\sin(x)$	% Error
1°	0.017456 rad.	0.017452	0,022920 %
2°	0.034906 rad.	0.034599	0,0387308 %
3°	0.052359 rad.	0.052335	0,045858 %
4°	0.069813 rad.	0.069756	0,081713 %
5°	0.087266 rad.	0.087155	0,127359 %
6°	0.104719 rad.	0.104528	0,182726 %
7°	0.122173 rad.	0.121869	0,249448 %
8°	0.139626 rad.	0.139173	0,325494 %
9°	0.157079 rad.	0.156434	0,412314 %
10°	0.174532 rad.	0.173648	0,509075 %
15°	0.261799 rad.	0.258881	1,127158 %
20°	0.349065 rad.	0.342020	2,059821 %
25°	0.436332 rad.	0.422618	3,245010 %
30°	0.523598 rad.	0.5	4,7196 %