



CARTA DE AUTORIZACIÓN

CÓDIGO

AP-BIB-FO-06

VERSIÓN

1

VIGENCIA

2014

PÁGINA

1 de 2

Neiva, 6 de junio de 2017

Señores

CENTRO DE INFORMACIÓN Y DOCUMENTACIÓN

UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA

Ciudad: Neiva

Los suscritos:

Karen Julieth Ramírez Viatela, con C.C. No.1.075.284.099

Andres Felipe Medina con C.C. No. 1.075.238.999

Autores de la tesis de grado

Titulado: Recursos Didácticos Para Afianzar Los Casos de Factorización
presentado y aprobado en el año 2017 como requisito para optar al título de licenciado en matemáticas;

Autorizamos al CENTRO DE INFORMACIÓN Y DOCUMENTACIÓN de la Universidad Surcolombiana para que con fines académicos, muestre al país y el exterior la producción intelectual de la Universidad Surcolombiana, a través de la visibilidad de su contenido de la siguiente manera:

- Los usuarios puedan consultar el contenido de este trabajo de grado en los sitios web que administra la Universidad, en bases de datos, repositorio digital, catálogos y en otros sitios web, redes y sistemas de información nacionales e internacionales “open access” y en las redes de información con las cuales tenga convenio la Institución.
- Permita la consulta, la reproducción y préstamo a los usuarios interesados en el contenido de este trabajo, para todos los usos que tengan finalidad académica, ya sea en formato Cd-Rom o digital desde internet, intranet, etc., y en general para cualquier formato conocido o por conocer, dentro de los términos establecidos en la Ley 23 de 1982, Ley 44 de 1993, Decisión Andina 351 de 1993, Decreto 460 de 1995 y demás normas generales sobre la materia.
- Continúo conservando los correspondientes derechos sin modificación o restricción alguna; puesto que de acuerdo con la legislación colombiana aplicable, el presente es un acuerdo jurídico que en ningún caso conlleva la enajenación del derecho de autor y sus conexos.

De conformidad con lo establecido en el artículo 30 de la Ley 23 de 1982 y el artículo 11 de la Decisión Andina 351 de 1993, “Los derechos morales sobre el trabajo son propiedad de los autores” , los cuales son irrenunciables, imprescriptibles, inembargables e inalienables.

Vigilada Mineducación

La versión vigente y controlada de este documento, solo podrá ser consultada a través del sitio web Institucional www.usco.edu.co, link Sistema Gestión de Calidad. La copia o impresión diferente a la publicada, será considerada como documento no controlado y su uso indebido no es de responsabilidad de la Universidad Surcolombiana.



CARTA DE AUTORIZACIÓN

CÓDIGO

AP-BIB-FO-06

VERSIÓN

1

VIGENCIA

2014

PÁGINA

2 de 2

EL AUTOR/ESTUDIANTE:

Firma: _____

EL AUTOR/ESTUDIANTE:

Firma: _____



TÍTULO COMPLETO DEL TRABAJO: Recursos Didácticos Para Afianzar Los Casos De Factorización

AUTORES:

Primero y Segundo Apellido	Primero y Segundo Nombre
Ramírez Viatela	Karen Julieth
Medina	Andres Felipe

DIRECTOR Y CODIRECTOR TESIS:

Primero y Segundo Apellido	Primero y Segundo Nombre
Alvis Puentes	Johnny Fernando
Reyes	Francisco Javier

ASESOR:

Primero y Segundo Apellido	Primero y Segundo Nombre
Alvis Puentes	Johnny Fernando

PARA OPTAR AL TÍTULO DE: Licenciado En Matemáticas

FACULTAD: EDUCACION

PROGRAMA O POSGRADO: Licenciatura En Matemáticas

CIUDAD: Neiva

AÑO DE PRESENTACIÓN: 2017

NÚMERO DE PÁGINAS: 65

Vigilada mieducación

La versión vigente y controlada de este documento, solo podrá ser consultada a través del sitio web Institucional www.usco.edu.co, link Sistema Gestión de Calidad. La copia o impresión diferente a la publicada, será considerada como documento no controlado y su uso indebido no es de responsabilidad de la Universidad Surcolombiana.



TIPO DE ILUSTRACIONES (Marcar con una **X**):

Diagramas___ Fotografías_x__ Grabaciones en discos__x_ Ilustraciones en general__x_ Grabados___
Láminas___ Litografías___ Mapas___ Música impresa___ Planos___ Retratos___ Sin ilustraciones___
Tablas o Cuadros_x_

SOFTWARE requerido y/o especializado para la lectura del documento:

MATERIAL ANEXO: CD - RW

PREMIO O DISTINCIÓN (*En caso de ser LAUREADAS o Meritoria*):

PALABRAS CLAVES EN ESPAÑOL E INGLÉS:

<u>Español</u>	<u>Ingles</u>	<u>Español</u>	<u>Ingles</u>
1. Factorización	Factorization	6. Polinomios	Polynomials
2. Factores	Factors	7. Rectángulos	Rectangles
3. Didácticos	Didactics	8. Términos Algebraicos	Algebraic Terms
4. Cuadrados Perfectos	Perfect Squares	9. Alcances	Scope
5. Geometría	Geometry	10. Enseñanza	Teaching



RESUMEN DEL CONTENIDO:

Este trabajo de grado se realizó con base en una problemática que presentan los docentes a la hora de afianzar los casos de factorización en estudiantes del grado octavo. Con base en esta problemática nace el objetivo principal que es presentar algunos recursos didácticos para los docentes, como herramienta útil para afianzar los métodos de factorización.

La metodología empleada en esta investigación se basó en el diseño de cuatro recursos didácticos los cuales contienen ejercicios resueltos pertenecientes a cada uno de los casos de factorización que permiten a los docentes implementarlos en sus clases y de esta manera motivar a los estudiantes a la hora de afianzar los casos de factorización generando de esta manera el aprendizaje colectivo y significativo.

Para el cumplimiento de cada uno de los objetivos específicos propuestos se tuvieron en cuenta bases teóricas y trabajos de investigación, también se tuvo muy en cuenta las observaciones, sugerencias y recomendaciones de profesores del programa de licenciatura en matemáticas.

Finalmente se presentaron cuatro recursos didácticos (el póquer algebraico, la baraja, dominó algebraico y el álgebra geométrica) los cuales permiten tener una ayuda extra en las aulas de clases para aprender de una manera más fácil y agradable los casos de factorización especialmente en estudiantes de grado octavo dado a que en la mayoría de los entes educativos, estos temas se afianzan de manera muy tradicional y se dejan de un lado recursos como los mencionados anteriormente que son de gran ayuda para el aprendizaje – enseñanza de la factorización.



ABSTRACT:

TEACHING RESOURCES TO STRENGTHEN

CASES OF FACTORING

This work of degree was realized based on a problematic that presents the teachers in the time of securing the cases of factorization in students of the eighth grade. Based on this problem, the main objective is to present some didactic resources for teachers, as a useful tool to strengthen the factorization methods.

The methodology used in this research was based on the design of four didactic resources which contain solved exercises pertaining to each of the factorization cases that allow the teachers to implement them in their classes and in this way to motivate the students at the time of To consolidate factorization cases, thus generating collective and meaningful learning.

In order to fulfill each of the specific objectives proposed, theoretical bases and research work were taken into account. The observations, suggestions and recommendations of teachers of the bachelor's degree program in mathematics were also taken into account.

Finally, four didactic resources (algebraic poker, deck, algebraic domino and geometric algebra) were presented, which allow extra help in classrooms to learn in an easier and pleasant way factorization cases especially in students of Eighth degree given that in most educational entities, these topics are very traditionally entrenched and resources such as those mentioned above are left aside, which are of great help for learning - teaching of factorization.

APROBACION DE LA TESIS

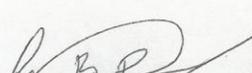
Nombre Presidente Jurado: Francisco Javier Reyes

Firma:


JURADO CALIFICADOR:

Nombre Jurado: Francisco Javier Reyes

Firma:


JURADO CALIFICADOR:

Vigilada mieducación

”



Universidad Surcolombiana

Facultad de Educación
Programa de Licenciatura en
Matemáticas

**RECURSOS DIDÁCTICOS PARA AFIANZAR
LOS CASOS DE FACTORIZACIÓN**

KAREN JULIETH RAMIREZ VIATELA
ANDRES FELIPE MEDINA

Neiva, Huila
2017



Universidad Surcolombiana

Facultad de Educación
Programa de Licenciatura en
Matemáticas

RECURSOS DIDÁCTICOS PARA AFIANZAR LOS
CASOS DE FACTORIZACIÓN

*Trabajo presentado como requisito de grado
para optar al título de licenciados en
matemáticas*

Karen Julieth Ramirez Viatela
20121109583

Andres Felipe Medina
20121111009

Asesor:
Mg. Johnny Fernando Alvis Puentes

Neiva, Huila
2017

Nota de Aceptación

Jefe de Programa

Asesor

Segundo Lector

AGRADECIMIENTOS

Agradezco en primera medida a Dios por haberme acompañado y guiado a lo largo de mi carrera , por ser la fortaleza en los momentos de debilidad y por brindarme una vida llena de oportunidades , aprendizajes , experiencias y sobre todo felicidad ; tambien agradezco especialmente a mi familia quienes me orientaron hacia el saber , el esfuerzo y la responsabilidad ; a mi hija y a mi novia que son la razón fundamental de mi crecimiento personal y profesional ; a mis hermanos que son el impulso positivo en el logro de mis metas .

Agradezco profundamente a mi asesor Mg Johnny Fernando Alvis Puentes por su dedicación, apoyo y generosa orientación y a la profesora Mg. Martha Cecilia Mosquera Urrutia por su valiosa colaboración , apoyo y amistad.

Andres Felipe Medina

A Dios, nuestro padre, quien con su ayuda, orientación y fuerza del espíritu santo me permitieron llegar hasta donde he llegado, por hacer realidad este sueño anhelado de cumplir una meta mas en mi vida.

A mis padres José Joel Ramirez y Zoraya Viatela que siempre han estado conmigo, guiándome por el camino correcto, brindándome amor, sabiduría y fuerza para seguir alcanzando metas y triunfos.

A mis hermanos Paola Andrea Ramirez y Victor José Ramirez que siempre han estado conmigo apoyandome en las decisiones importantes de mi vida.

A mi Hija Valery Sofia Medina Ramirez y a mi novio Andres Felipe Medina que siempre confiaron en mis capacidades y me motivaron a iniciar y culminar esta meta.

Karen Julieth Ramirez Viatela

Introducción	10
1. Antecedentes y Formulación del Problema	11
1.1. Antecedentes	11
1.2. Formulación y Planteamiento del Problema	14
1.3. Objetivos	15
1.3.1. Objetivo General	15
1.3.2. Objetivos Específicos	15
1.4. Justificación	16
2. Marco Teórico	18
2.1. Historia de la Factorización	18
2.1.1. Orígenes De La Factorización	18
2.2. La Factorización	21
2.2.1. Diofanto	21
2.2.2. Euclides	22
2.2.3. Thábit Ibn Qurra	22
2.2.4. Definición de la factorización según las notas realizadas por Alicia Bernabe Andres	22
2.3. La Factorización En Las Matemáticas Escolares	23
2.3.1. Factor Común	25
2.3.2. Factor Común Por Agrupación De Términos	27
2.3.3. Diferencia De Cuadrados	28
2.3.4. Trinomio Cuadrado Perfecto	30
2.3.5. Trinomio De La Forma $x^{2n} + bx^n + c$ con $n \in \mathbb{Z}^+$	31
2.3.6. Trinomio De La Forma $ax^{2n} + bx^n + c$ con $n \in \mathbb{Z}^+$	31
2.3.7. Suma y Diferencia de Cubos Perfectos	32
2.4. Recursos Didácticos	32
2.5. Algunos Recursos Didácticos	36
2.5.1. Dominó Algebraico	36
2.5.2. El Póquer	36

2.5.3. Álgebra Geométrica	36
2.5.4. Juego De Mesa “Baraja”	36
3. Metodología	37
4. RECURSOS DIDÁCTICOS PARA AFIANZAR LOS CASOS DE FACTORIZACIÓN	40
4.1. Recursos Didácticos	40
4.1.1. Dominó Algebraico	40
4.1.2. “La Baraja”	42
4.1.3. El Póquer Algebraico	48
4.1.4. El Álgebra Geométrica	51
4.2. Recomendaciones de los expertos	56
4.3. Alcances y Limitaciones de los Recursos Didácticos	56
4.3.1. Dominó Algebraico	56
4.3.2. “La Baraja”	57
4.3.3. El Póquer Algebraico	57
4.3.4. Álgebra Geométrica	57
5. Conclusiones	59

ÍNDICE DE FIGURAS

2.1. Proposición 1 del II libro de los Elementos de Euclides	19
2.2. Solución Gráfica de $x^2 + 4x = 140$ (paso 1)	19
2.3. Solución Gráfica de $x^2 + 4x = 140$ (paso 2)	20
2.4. Solución Gráfica de $x^2 + 4x = 140$ (paso 3)	20
2.5. Términos de una Expresión Algebraica	25
2.6. Factor Común por agrupación de términos	28
2.7. Representación Geométrica de $x^2 - a^2$ (paso 1)	29
2.8. Representación Geométrica de $x^2 - a^2$ (paso 2)	29
2.9. Representación Geométrica de $x^2 - a^2$ (paso 3)	30
2.10. Representación Geométrica de $(a + b)^2$	31
2.11. Representación Geométrica de $(a - b)^2$	31
2.12. Función de los recursos didácticos	33
2.13. Utilidad de los recursos didácticos	33
4.1. Dominó Algebraico	41
4.2. Ejemplo Instrucción cinco	41
4.3. Ejemplo Instrucción siete	42
4.4. Baraja de Cartas	43
4.5. Los polinomios y sus factores	44
4.6. Carta del mazo de polinomios	44
4.7. Entrega de las cartas de factores a cada jugador	45
4.8. El Jugador 1 coloca un factor del polinomio	45
4.9. La Baraja Paso 6	46
4.10. Polinomio Factorizado	46
4.11. "El póquer"	48
4.12. Billetes	48
4.13. Repartición de cartas en "El póquer"	49
4.14. Entregar máximo dos cartas adicionales en "El póquer"	49
4.15. Ejemplo de un caso de factorización	49
4.16. Cuadrado de área x^2	52

4.17. Cuadrado de área y^2	52
4.18. Rectángulo de área xy	52
4.19. Rectángulo de área x	52
4.20. Rectángulo de área y	53
4.21. Cuadrado de área 1	53
4.22. Representación geométrica de $x^2 + 2x + 1$	53
4.23. Factorización geométrica de $x^2 + 2x + 1 = (x + 1)(x + 1)$	53
4.24. Representación geométrica de $x^2 + x \cdot y$	53
4.25. Representación geométrica de $x^2 + x \cdot y = x(x + y)$	54
4.26. Representación geométrica de $x^2 - x \cdot y$	54
4.27. Representación geométrica de $x^2 - x \cdot y = x(x - y)$	54
4.28. Representación geométrica de $x \cdot y + 3x + 2y + 6$	54
4.29. Representación geométrica de $x \cdot y + 3x + 2y + 6 = (x + 2)(y + 3)$	54
4.30. Representación geométrica de $x^2 - y^2$	55
4.31. Representación geométrica de $x^2 - y^2$	55
4.32. Representación geométrica de $x^2 - y^2 = x(x - y) + y(x - y)$	55

ÍNDICE DE CUADROS

4.1. Tabla de puntuación	47
4.2. Tabla de registro de puntuación	47

INTRODUCCIÓN

El presente Trabajo de Grado titulado **Recursos Didácticos Para Afianzar Los Casos De Factorización** pretende ser una investigación enfocada en la enseñanza, la cual permitirá al docente en ejercicio, desarrollar de manera más amena la clase de matemáticas, de tal forma que los estudiantes del grado octavo afiancen y fortalezcan sus conocimientos, particularmente lo relacionado con los casos de factorización.

Principalmente se pretende con el uso de recursos didácticos presentar una alternativa para reforzar y afianzar de una manera más llamativa, agradable y no tradicional los casos de factorización en estudiantes del grado octavo. Para ello se contribuirá al refuerzo de los métodos de factorización mediante una recopilación, clasificación, selección y caracterización de cada uno de los recursos que se presentarán en este trabajo de grado como una herramienta para ser implementada en el aula por el docente del área de matemáticas.

El presente trabajo de grado, está estructurado en cuatro capítulos:

En el primer capítulo se presentan los trabajos que anteceden a esta investigación; seguidamente se realiza la formulación y planteamiento del problema y posteriormente se dan conocer los objetivos y la justificación del problema planteado.

En el segundo capítulo se expone la historia y epistemología de la factorización; seguidamente se presentan los casos de factorización y se presentan los conceptos de recursos didácticos, para finalmente enunciar los recursos didácticos seleccionados para esta investigación.

En el tercer capítulo se describe la metodología empleada para la realización de esta investigación.

En el cuarto capítulo se exponen de manera detallada los recursos didácticos, determinando los alcances y limitaciones de cada uno de ellos.

Finalmente se presentan las conclusiones obtenidas de esta investigación.

CAPÍTULO 1 _____

ANTECEDENTES Y FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

El presente trabajo de investigación tiene como finalidad hacer énfasis en los recursos didácticos que permiten afianzar los métodos de factorización en estudiantes del grado octavo, pues estos ayudan al estudiante en el proceso de enseñanza - aprendizaje de los casos más comunes de factorización los cuales le permiten avanzar en sus futuros estudios.

Este capítulo hace referencia a los antecedentes del problema de investigación. Se presenta tanto objetivo general como los objetivos específicos. Seguidamente se da una descripción de la formulación y planteamiento del problema. Finalmente se presenta la justificación del objeto de estudio.

1.1. Antecedentes

En esta sección se presenta una breve descripción de algunas investigaciones y tipos de actividades relacionados con el problema de investigación, que permiten contextualizar las diferentes perspectivas que han sido abordadas para la enseñanza de la factorización de expresiones polinómicas.

Como punto de partida se realizó una revisión de los trabajos de tesis de los estudiantes del programa de Licenciatura en Matemáticas y Físicas de la Universidad de Valle. El trabajo de mayor relación es el elaborado por Gómez y Torres (1993) titulado *Una alternativa para el proceso de enseñanza - aprendizaje de la factorización de polinomios y las fracciones algebraicas*. En este trabajo se aplica el método heurístico para el diseño de un material didáctico, en donde el alumno construye sus propias ideas y por ende el conocimiento mediante la presentación de situaciones problemáticas concretas.

Aunque el material fue expuesto a un grupo de estudiantes sin conocimientos de polinómios, no se presenta un análisis detallado de los resultados y observaciones. Al igual que este trabajo se intenta evitar el método tradicional de enseñanza para la factorización de expresiones polinómicas, para ello se apoyan en la aritmética, la geometría y la teoría de conjuntos, haciendo uso del lápiz y papel para crear situaciones que están guiadas por preguntas que van encauzando al alumno a una conclusión.

Un segundo trabajo titulado *Diseño y aplicación de una estrategia lúdica para la enseñanza - aprendizaje de la factorización de polinomios*, plantean el diseño de una propuesta pedagógica tipo Juego de Mesa con una estrategia didáctica y lúdica de acercamiento a la factorización de polinomios, dirigida a estudiantes del grado undécimo; donde plantean aprovechar las costumbres, y elementos del entorno familiar y comunitario, específicamente para de los estudiantes del colegio José Antonio Galán de la vereda Alto Bonito de Manizales. La propuesta nace con el afán de mostrarles a los estudiantes nuevas formas de aproximación al aprendizaje. Inicialmente indagaron sobre la preferencia en la posible aplicación de aspectos lúdicos; la mayoría de estudiantes optaron por juegos de mesa, sobre los cuales manifestaron que eran de uso frecuente en sus contextos. (Sánchez F. 2015)

Otro trabajo de investigación es el titulado *El Juego como recurso didáctico para reforzar métodos de factorización en el grado octavo*, desarrollado por Diana Carolina Jiménez Esteban y Yudi Rosmari Márquez Porras en el año 2009, para optar por el titulado de Licenciatura en Matemáticas, en la Universidad de Santander. La investigación consistió en aplicar cinco juegos de la vida cotidiana para reforzar los casos de factorización de polinómios. Los juegos aplicados fueron el parqués, el dominó, la lotería algebraica, el rompecabezas, el mensaje oculto y la carrera de observación. Las autoras sistematizan el proceso de cada juego y muestran sus posibilidades, sus dificultades y los resultados obtenidos, los cuales les sirven para diseñar una propuesta didáctica para la enseñanza de la factorización, con estudiantes del grado octavo.

El trabajo de Andriws Giovanni De Los Rios realizado en el año 2016 titulado *El póquer como propuesta lúdica para afianzar el conocimiento de los primeros 7 casos de factorización*; Esta investigación se constituye como un diseño lúdico, basado en el póquer, con el propósito de afianzar en los estudiantes del Técnico en Contabilidad y Finanzas del Centro de Formación Bancaria el conocimiento en los primeros siete casos de factorización. Para este proyecto aplicaron una prueba para medir el conocimiento de los estudiantes en este tema.

Las pruebas que aplicaron a los estudiantes del Centro de Formación Bancaria, evidenciaron diferentes y preocupantes situaciones respecto al reconocimiento de los primeros 7 casos de factorización en donde el uso de letras (variables) y constantes (números) en fórmulas, expresiones y ecuaciones, temas los cuales no conocían muy bien. Presentaron dificultad en el empleo del lenguaje matemático, incluso cuando este se había utilizado en el semestre; la noción de variable y la noción de dominio no fueron efectivas, repercutiendo en bajos resultados en la prueba del tema en cuestión. Diseñaron un ejercicio lúdico basado en el póquer para afianzar el conocimiento en los primeros siete casos de factorización de los estudiantes del grupo 1002, del programa técnico laboral en auxiliar contable del Centro de Formación Bancaria, para motivar el aprendizaje de este tema y en sí del álgebra en general.

La investigación de Luz Stella Botero Ramírez titulada *Diseño de una estrategia didáctica para la enseñanza de la factorización utilizando geometría*, para los cursos básicos de matemáticas en el primer semestre universitario. Esta propuesta tiene la finalidad de diseñar e implementar una estrategia didáctica para la enseñanza de los temas de factorización, utilizando geometría para ser implementada en los cursos básicos de Matemáticas del primer semestre en las diferentes carreras universitarias.

El trabajo de grado de Milton Javier Morán Galindo el cual lleva como título *Material Didáctico Para El Fortalecimiento De Los Procesos De Aprendizaje De La Factorización En Grado Octavo Del Colegio San Francisco De La Ciudad De Tuluá*; el objetivo principal de esta investigación fue el fortalecimiento de la enseñanza de la factorización a través de material didáctico, para generar aprendizajes significativos en los estudiantes del grado octavo del Colegio San Francisco de Tuluá, por tal motivo acudieron a implementar técnicas y estrategias como el uso de elementos geométricos tales como el cuadrado y rectángulos de diferentes dimensiones para desarrollar la factorización en polinómios.

Todos estos trabajos antes citados son pertinentes con la investigación aquí planteada, ya que aborda la producción de un material educativo desde los recursos didácticos que incluyen principalmente contenidos de los casos de factorización, los cuales son adecuados y muy importantes para nuestro objeto de estudio.

1.2. Formulación y Planteamiento del Problema

El objeto de estudio de la presente investigación se enmarca en una problemática general, documentado teórica y vivencialmente que presentan los docentes del área de matemáticas pues en la mayoría de los casos solo se apoya en una única fuente bibliográfica como lo es el álgebra de Baldor, para abordar curricularmente los casos de factorización.

“La carencia de innovación de estrategias y el escaso empleo de recursos y medios didácticos a la hora de llevar a cabo la explicación de los casos de factorización en el grado octavo; genera la problemática desde la enseñanza pues tradicionalmente no se gestiona el conocimiento con ayuda de otros instrumentos diferentes a los tradicionales y los métodos de factorización son ejecutados al repetir una lista de ejercicios similares a los expuestos en la clase conllevando a que el estudiante aprenda de memoria algoritmos, sin la interpretación y sin la comprensión significativa de lo que efectúa, como también la desconexión de los conocimientos previos que ya poseen. Esto provoca que los estudiantes se muestren limitados al momento de recibir clases de matemática, en donde el maestro simplemente se basa en los contenidos de un libro y no va más allá de lo rutinario, esto ocasiona que el educando no asimile los conocimientos de una manera constructiva debido a que simplemente realiza lo que el profesor enseñó durante la clase, sin darle oportunidad a que exponga sus ideas y pueda aprender de una mejor manera” (Palarea y Socas, 1997, p. 22).

“La desconexión entre diferentes conceptos y procedimientos es atenuada por el profesor, pues en su planificación al tomar los contenidos de los textos escolares, estos inducen la presentación de la factorización a una serie de casos algorítmicos, sin relación entre estos y sin relación con otras representaciones fuera de la algebraica. En ese sentido la carencia de otras formas de representación en este proceso, se manifiesta en algunos de los errores que comenten los alumnos en el álgebra” (Grupo Azarquiel, 1993, p. 137).

Por las características de la enseñanza tradicional de los métodos de factorización que emplean los docentes de matemáticas, se propone en este trabajo de grado generar un serie de recursos didácticos, cuyo objetivo principal es brindarle herramientas al docente a la hora de ejecutar los casos de factorización, con el fin de brindar un aprendizaje significativo y rescatar algunos conceptos relacionados con la factorización.

Especialmente por parte de aquellos que tienen la creencia que la esencia del saber matemático está en los procedimientos con manipulaciones algebraicas de lápiz y papel, un ejemplo de esos conocimientos (procedimental y conceptual) encasillados a este tratamiento, es la factorización de expresiones polinómicas.

“En el caso del álgebra, muchos docentes coinciden en afirmar que la mayoría de los alumnos cometen los mismos errores de forma reiterada, síntoma de las serias dificultades que tienen en su aprendizaje. Estos problemas parecen estar relacionados con una serie de deficiencias en comprensión de conceptos y en la forma de enfocar el álgebra que traen como consecuencia inmediata una forma errónea de enfrentarse con su aprendizaje; en la mayoría de los casos los alumnos memorizan sin comprender las reglas y procedimientos de cálculo y las aplican automáticamente, lo que les lleva a

cometer las mismas equivocaciones de manera persistente. Además, los errores suelen ser considerados por el docente como falta de estudio o de atención, cuando en realidad indican una fuerte carencia de comprensión.

Ahora bien, si se compara la enseñanza de la aritmética con la del álgebra, esto implica indudablemente un cambio metodológico al pasar del cálculo con números de la aritmética al cálculo literal del álgebra, lo que significa un gran avance en el campo de la abstracción y la generalización. Se requiere por tanto un especial cuidado didáctico para que que facilite la conexión entre ambas materias, y que el alumno perciba que el simbolismo algebraico es solo una manera de generalizar ciertas propiedades aritméticas” (Socas, 1997).

Con estas necesidades y nuevos requerimientos, se presentarán en este trabajo un documento útil el cual describe detalladamente los Recursos Didácticos en el cual se plantean el diseño de algunas actividades que involucran la incorporación de juegos en el aula para la enseñanza y aprendizaje de los métodos de factorización en estudiantes del grado octavo. Principalmente el problema planteado se formula bajo la siguiente pregunta central **¿Cuáles recursos didácticos facilitan a los docentes; afianzar los casos de factorización en estudiante del grado octavo?** . La cual es sustentada teniendo en cuenta las siguientes preguntas auxiliares:

- ¿Cuáles son las principales debilidades y dificultades que presentan los docentes en la enseñanza de la factorización de expresiones algebraicas?
- ¿Cómo utilizar los recursos didácticos de tal manera que faciliten o apoyen la comprensión y construcción significativa de los conocimientos (conceptos y procedimientos) relacionados con la factorización de expresiones algebraicas?

1.3. Objetivos

1.3.1. Objetivo General

- Presentar algunos Recursos Didácticos para los docentes, como herramienta para el refuerzo de los métodos de factorización en estudiantes del grado octavo.

1.3.2. Objetivos Específicos

- Recopilar y seleccionar algunos recursos didácticos.
- Caracterizar los recursos didácticos considerando aspectos teóricos.
- Validar los recursos didácticos dado su funcionalidad.
- Determinar los alcances y limitaciones del uso de cada uno de los recursos didácticos para el afianzamiento de los métodos de factorización.

1.4. Justificación

La importancia de este trabajo es presentar algunos recursos didácticos para los docentes, como herramienta útil para el refuerzo de los métodos de factorización en estudiantes del grado octavo.

Se plantean algunas actividades que involucran la incorporación de juegos en el aula para la enseñanza y aprendizaje de la factorización; debido a que el juego es una actividad natural, agradable, que proporciona placer, felicidad en un momento y sitio determinado, que permite al individuo mostrarse tal como es, reafirmando su personalidad, autoestima y de acuerdo al propósito con que se utiliza, se logra progresar en diferentes campos como lo psicológico, afectivo social y educativo con la finalidad facilitar y afianzar los conocimientos acerca de los casos de factorización.

Con base en las múltiples dificultades que presentan los alumnos al abordar los casos de factorización; surge la necesidad de recopilar, analizar, organizar y producir un documento en el cual se brindarán las pautas a seguir sobre cada uno de los recursos didácticos que le serán de gran ayuda al docente de matemáticas; pues con base en cada uno de los recursos podrá interactuar de forma directa con los alumnos del grado octavo a la hora de afianzar los casos de factorización, obteniendo así un aprendizaje colectivo y significativo.

La factorización de expresiones polinómicas conlleva a una mirada mucho más general que alude a la producción, reconocimiento y caracterización de expresiones equivalentes. Lo que significa, que tal habilidad y desempeño está asociada a un problema de comprensión de tal temática. Este tipo de comprensión tiene que ver con la manipulación procedimental de tales expresiones, reconociendo las propiedades de la igualdad y de las expresiones que posibilitan tal manipulación, pero aún más allá de los aspectos procedimentales está la manera como se concatenan los conceptos involucrados en este contenido y las diversas representaciones asociadas a estos, en este caso se trata de explicitar la relación entre factores, resultados de un proceso de factorización

Esta situación es lo que hace atractivo la factorización y da alternativas para que el docente le dé la importancia dentro del currículo de matemáticas pues en “los Lineamientos Curriculares y los Estándares Básicos de Competencia presentan el Pensamiento Variacional y los Sistemas Algebraicos y Analíticos como un proceso fundamental en la enseñanza de las matemáticas. Este pensamiento muestra que el álgebra es un sistema potente de representación y de descripción de fenómenos de variación y cambio y no solamente un juego formal de símbolos no interpretados, por útiles, ingeniosos e interesantes que sean dichos juegos” (MEN, 2006, p. 68). “Por esta razón en los currículos de matemáticas se introduce este pensamiento no como un fragmento sino como un complemento que permite el acercamiento a la comprensión y uso de los conceptos y procedimientos de patrones, procesos algebraicos y las funciones para el aprendizaje con sentido del cálculo numérico y algebraico. Sin embargo, internacionalmente este pensamiento se conoce con el término de Pensamiento Algebraico el cual va a ser utilizado en nuestro proyecto de investigación” (Arzarello, 2006).

Considerando lo anterior, se realiza en este trabajo un documento útil en el cual se

expone de manera detallada el uso de algunos recursos didácticos teniendo en cuenta el microentorno social o ambiente didáctico (de enseñanza - aprendizaje y evaluación); con la finalidad de generar un aprendizaje significativo de los casos de factorización que se pueden articular y configurar respectivamente, con la ayuda de los recursos didácticos que concretan en el diseño e implantación de cada uno de ellos, acordes a la pregunta que formula el problema y se aborda en este trabajo de grado.

El presente capítulo muestra una breve reseña histórica de la factorización y sus principales precursores; se presenta los métodos de factorización desde las matemáticas escolares, seguidamente se dan unas definiciones de los recursos didácticos y finalmente se enuncian los recursos didácticos a tratar en este trabajo de grado.

2.1. Historia de la Factorización

2.1.1. Orígenes De La Factorización

Los babilonios, fueron los primeros que resolvieron, ecuaciones cuadráticas. En unas tablillas descifradas por Neugebaver en 1930, cuya antigüedad es de unos 4000 años, se encontraron soluciones a varias de estas ecuaciones .

Empleando el método conocido actualmente como completar el cuadrado ,en cuyo desarrollo, los babilonios, se valieron de factorizaciones simples que ya conocían.

Este método los llevó a la fórmula cuadrática:

$$x = \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q} + \frac{p}{2}; \text{ como solución de la ecuación } x^2 - px = q$$

El trabajo de los babilonios constituyó un logro notable, teniendo en cuenta que no contaban con la notación moderna y por su alto nivel de abstracción, al considerar las ecuaciones cuárticas como ecuaciones cuadráticas disfrazadas y resolverlas como tales.

Posteriormente, los griegos y los árabes consiguieron resolver ecuaciones de segundo grado utilizando, el método de completar el cuadrado con aplicación de áreas; ambas civilizaciones se valieron de representaciones geométricas para mostrar hechos algebraicos, como se evidencia en el II libro de los Elementos de Euclides, por ejemplo:

Proposición 1. Si hay dos rectas y una de ellas se corta en un número cualquiera de segmentos, el rectángulo comprendido por las dos rectas es igual a los rectángulos obtenidos por la recta no cortada y cada uno de los segmentos.

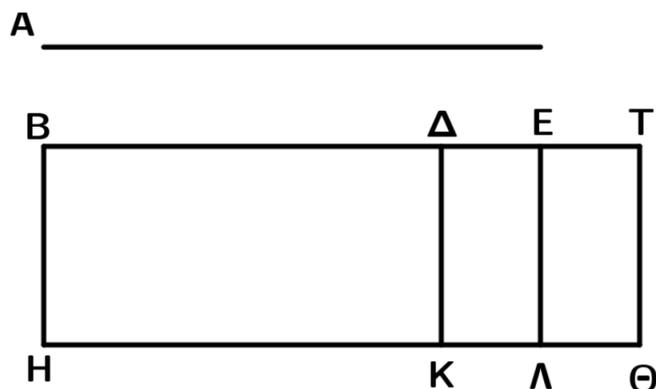


Figura 2.1: Proposición 1 del II libro de los Elementos de Euclides

La proposición equivale a la propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la adición:

$$ab + ac + ad = a \times (b + c + d)$$

Para resolver ecuaciones de la forma:

$$x^2 + bx = c$$

los griegos (Euclides) y los árabes¹ (Al- khowarizmi y Tabit Ben Qurra), desarrollaron el siguiente procedimiento para encontrar un número x tal que

$$x^2 + 4x = 140$$

consideraban x como el lado de un cuadrado de área x^2 y $4x$ como el área de un rectángulo de lados 4 y x , respectivamente; en consecuencia, $x^2 + 4x$ es el área de la figura 2.2 :

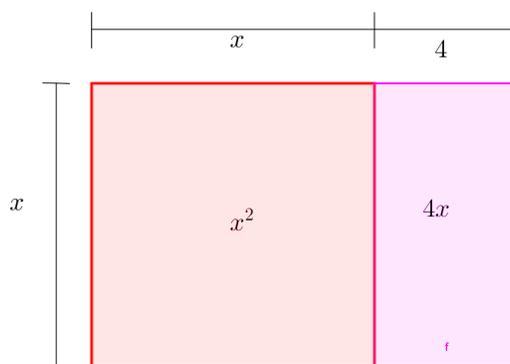


Figura 2.2: Solución Gráfica de $x^2 + 4x = 140$ (paso 1)

Posteriormente, cambiaban este dibujo por otra figura con la misma área, dividiendo el rectángulo de área $4x$ en dos rectángulos de área $2x$ y colocando uno de ellos a la derecha del de área x^2 y el otro debajo para formar la siguiente figura 2.3 :

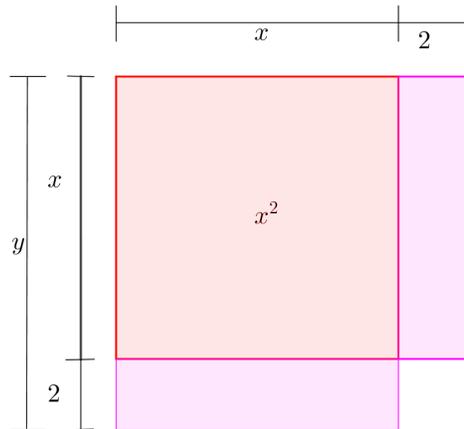


Figura 2.3: **Solución Gráfica de $x^2 + 4x = 140$ (paso 2)**

Esta figura puede completarse para formar un cuadrado, agregando en la esquina inferior derecha, un cuadrado, cuya área se conoce; como se puede apreciar en la figura 2.4:

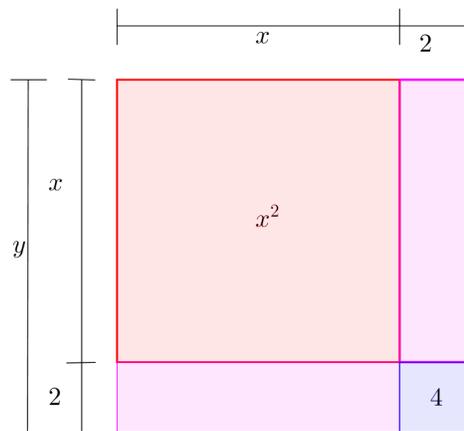


Figura 2.4: **Solución Gráfica de $x^2 + 4x = 140$ (paso 3)**

De esta manera, el área de la región sombreada equivale a 140 (pues corresponde a $x^2 + 4x$) unidades cuadradas y el área del cuadrado en blanco es 4 unidades cuadradas; es así, como el área total corresponde 144, luego el lado del cuadrado grande, llamémoslo y , es 12, de donde $x = 10$ unidades.

Euclides de Alejandría, fue el primer matemático que planteó y recopiló los conceptos básicos de la factorización de números, en los libros VII, VIII y IX de los Elementos.

En conjunto, estos libros constan de 23 definiciones y 102 proposiciones, donde se trata a los números como objetos que se representan por medio de segmentos y en consecuencia, Euclides emplea las expresiones (está medido por) y (mide a), para referirse a los conceptos múltiplo y divisor, respectivamente.

El desarrollo más reciente de la factorización se inicia en el Renacimiento Italiano, hacia el año 1545, con la publicación del Ars Magna de Girolamo Cardano (1501-1576) en el cual se muestran las soluciones para la ecuación cúbica y cuártica, desarrolladas por Nicolo Fontana Tartaglia (1500-1557), Ludovico Ferrari (1522-1565) y él mismo, obtenidas a partir de un procedimiento sistemático completando el cuadrado, de una manera conveniente, para llegar a la solución. Probablemente esta fue la mayor contribución al álgebra, desde que los babilonios aprendieron a completar el cuadrado para solucionar ecuaciones cuadráticas, debido a la motivación que generó para el estudio de la solución de ecuaciones polinómicas de grado mayor.

A partir de esta publicación, los matemáticos centraron sus esfuerzos en la búsqueda de la solución para la ecuación de quinto grado durante más de dos siglos y medio. Niels Henrik Abel (1802-1829) creyó haber encontrado la solución; él mismo encontró el error en su demostración y en 1824 ó (Sobre la resolución algebraica de ecuaciones), donde demuestra la imposibilidad de hallar alguna solución por radicales para la ecuación de quinto grado, acabando de esta manera con la búsqueda infructuosa de muchos matemáticos.

A raíz de esta publicación el problema fue reformulado, ahora se intentaba determinar las condiciones que deben cumplir las raíces de una ecuación polinómica, para que ésta tenga solución, dado que algunas ecuaciones de quinto grado u otros grados superiores si tenían solución.

En este sentido, y a partir de los trabajos de Lagrange, Legendre, Gauss y Abel, Evariste Galois (1811-1832) logró determinar cuáles ecuaciones polinómicas de grado superior a cuatro eran solubles por radicales y cuáles no, estudiando las permutaciones de las raíces de la ecuación. El conjunto de estas raíces conforman una estructura de grupo, concepto introducido por él e incorporado a la teoría de ecuaciones algebraicas. Así, el objeto de estudio del álgebra trascendió de la solución de ecuaciones, al estudio de estructuras como la de grupo y posteriormente, la de campo.

En este contexto, crece el interés por encontrar mejores métodos para resolver ecuaciones algebraicas de cualquier grado; la búsqueda de la solución de ecuaciones de grado mayor que cuatro, llevó a encontrar los teoremas de factorización en el dominio de integridad de los polinomios y en general, para cualquier dominio de integridad.

2.2. La Factorización

La factorización es uno de los procesos más difíciles de comprender por los estudiantes de la educación secundaria, llegando a no reconocer la necesidad de emplearla o

la posibilidad de aplicarla pero al mismo tiempo, es una de las herramientas más empleadas en el trabajo matemático para (transformar) una expresión algebraica de manera conveniente, para resolver algún problema. Pero su real utilidad, vista a través de la historia, es la solución de ecuaciones algebraicas; de hecho, en un primer momento, la factorización surge ante la necesidad de solucionar ecuaciones de segundo grado.

Con base en esta idea a continuación se presentan algunos aportes de distintos matemáticos sobre la factorización y los conceptos sobre que se entiende por factorización consignados en el foro realizado por Alicia Bernabe Andres.



2.2.1. Diofanto

Hacia el siglo III aparece Diofanto (200 - 290 a. C.), considerado el más importante de los algebristas griegos de la época alejandrina; introdujo un simbolismo algebraico que consistía en designar a la incógnita con la primera sílaba de la palabra griega arithmos, que significa número, es decir utiliza abreviaciones de palabras para representar algunas de las nociones del álgebra. A este manejo de los problemas se le ha llamado álgebra sincopada.

La obra más importante que se conoce de Diofanto es su Aritmética, un tratado de 13 libros del que sólo se conocen los 6 primeros; trataba temas como las soluciones particulares, enteras o racionales de ecuaciones algebraicas determinadas e indeterminadas. Es el caso de la ecuación $x^2 + y^2 = z^2$ conocida por los babilonios que encontraron numerosos casos particulares, llamadas triplas pitagóricas, y resuelta geoméricamente por el Teorema de Pitágoras.

Diofanto muestra habilidad en la reducción de ecuaciones de diferentes tipos, en las que encontramos ecuaciones lineales con dos incógnitas de la forma $x + y = 0$, y de segundo grado como $ax^2 + bx = c$. En su libro no hay un desarrollo axiomático, tampoco se encuentran todas las soluciones posibles enteras, ya que como sabemos se requiere el sistema numérico de los complejos para obtener todas las soluciones. En las ecuaciones de segundo grado, se elige la mayor de las respuestas cuando son enteros positivos; al resolver una ecuación rechaza las raíces negativas o imaginarias, y dice que la ecuación no es resoluble.

2.2.2. Euclides

Euclides, es quien en el libro II de Elementos enuncia algunas proposiciones que se pueden asociar con identidades algebraicas (aunque algunos historiadores afirman que dichas identidades representaban exclusivamente nociones geométricas), entre las cuales se destaca la II.5 que se puede asociar actualmente con la diferencia de cuadrados.

Proposición II.5. Si se corta una línea recta en iguales y desiguales, el rectángulo comprendido por los segmentos desiguales de la recta entera junto con el cuadrado de

¹Entrevista - Foro sobre el concepto de factorización realizado por Alicia Bernabe Andres a estudiantes del posgrado de Matematica Educativa del CICATA

la (recta que está) entre los puntos de sección, es igual al cuadrado de la mitad.

2.2.3. Thábit Ibn Qurra

La manera general de resolver ecuaciones usando figuras (como los babilonios) se le debe a Thábit Ibn Qurra, quien hace uso de las proposiciones planteadas por Euclides para relacionar cuadrados con rectángulos de forma tal que con ello logra plantear un método para resolver ecuaciones que hoy se puede asociar, en lenguaje simbólico-algebraico, con la igualdad:

$$x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2$$

2.2.4. Definición de la factorización según las notas realizadas por Alicia Bernabe Andres

- Factorización es separar una expresión algebraica en dos o mas factores.
- Factorizar es descomponer una expresión algebraica como el producto de otras expresiones más simples.
- Factorizar es descomponer una expresión matemática como el producto de factores más simples.
- La factorización es entendida como la descomposición de una expresión matemática (que puede ser un número, una suma, una matriz, un polinomio etc), existen diferentes técnicas de factorización, dependiendo de los objetos matemáticos estudiados; el objetivo es simplificar una expresión o reescribirla en términos (bloques fundamentales) que reciben el nombre de factores.
- La factorización es el proceso por medio del cual, una expresión matemática (número, suma, polinomio etc), se puede descomponer en partes mas pequeñas, y simples que por lo general son más manipulables para el estudiante, la factorización nos permite jugar con términos llamados factores, que me simplifican, visual y / o aritméticamente una expresión.
- La factorización es aplicar la propiedad distributiva, donde la expresión esta dada en la forma $ab + ac$ y al usar la propiedad mencionada puedo escribir la expresión anterior de la forma $a(b + c)$.
- Factorizar en algebra es descomponer una expresión algebraica en dos o mas expresiones (factores), de tal forma que la multiplicación de estas den como resultado la expresión original.

- La factorización es entendida como la técnica matemática de descomponer en factores una expresión algebraica; entendiéndose como factores las expresiones que están multiplicando entre sí y que es posible comprobar que nuestra factorización fue correcta si al multiplicar los factores llegamos nuevamente a la expresión algebraica original.

2.3. La Factorización En Las Matemáticas Escolares

En este apartado se presenta de manera sintética el significado de la factorización; y la forma como se presentan los principales casos de factorización en la educación secundaria.

Factorizar una expresión matemática es hallar dos o más factores cuyo producto es igual a la expresión propuesta, pues se buscan los factores de un producto dado.

En las matemáticas, un conjunto de elementos relacionados entre sí, por operaciones básicas se conoce con el nombre de polinomios aritméticos.

Si dicho conjunto posee además de constantes, variables, este polinomio se conoce como polinomio algebraico y el cual es una representación abstracta de una modelación. (Poli = muchos; nomios = distribución).

Los polinomios algebraicos son clasificados de acuerdo a su número de términos:

- Monomio: expresión algebraica que tiene un solo término.
- Binomio: Expresión algebraica que tiene dos términos.
- Trinomio: Expresión algebraica que tiene tres términos.
- Polinomio: Expresión algebraica que tiene más de tres términos

Ejemplos de polinomios Algebraicos

$2w \mapsto \textit{monomio}$

$6q + 8p \mapsto \textit{binomio}$

$3s + 4f + 5g \mapsto \textit{trinomio}$

$2p + 4t + 6y + 9q \mapsto \textit{Polinomio}$

Término Algebraico

Un término algebraico consta de las siguientes partes:

- **Signo** Puede ser positivo (+) , o negativo (-).
- **Coficiente**. Si bien en el producto de dos o más factores, cualquiera de ellos puede llamarse coeficiente de los otros factores, se le llama coeficiente a una constante (con todo y signo), que es un factor de las variables de cualquier término algebraico.
- **Variable (o parte literal)** . Es una generalización de una cantidad.
- **Exponente**. Es el número de veces que se multiplicará la cantidad generalizada o variable, por sí misma.
- **Grado de un Polinomio**. Se le llama grado de un polinomio al máximo de los exponentes de una variable en los distintos monomios de un polinomio.

Ilustración de una expresión algebraica y sus partes:

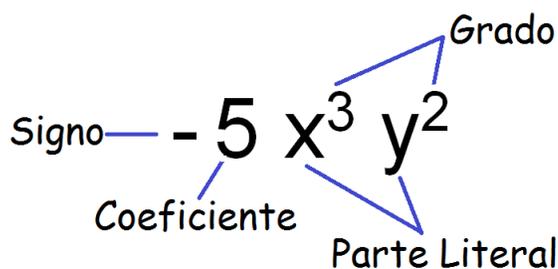


Figura 2.5: Términos de una Expresión Algebraica

Términos semejantes. Son aquellos que tienen la misma parte literal y a su vez estos en una expresión algebraica se puede reducir al adicionar sus coeficientes

Factor : Se llama factor a toda expresión matemática que se está multiplicando con otra.

En Aritmética es relativamente fácil factorizar un número. Así, para factorizar el 36, que significa lo mismo que preguntar ¿qué números multiplicados dan 36?, hasta mentalmente se puede obtener que $36 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$; en cambio, para expresiones algebraicas ya no resulta tan evidente la factorización, por lo que se requiere de un estudio detallado.

Ciertamente existen expresiones algebraicas muy elementales que fácilmente se pueden factorizar, como por ejemplo, $6a^2b$ que es sencillo deducir que equivale a la multiplicación de $2 \cdot 3 \cdot a \cdot a \cdot b$; sin embargo, se complica el asunto si se pregunta ¿qué números o cantidades multiplicadas entre sí dan $2x^2 + 9x - 5$? Por esta razón, para factorizar expresiones algebraicas es necesario clasificarlas en diferentes casos. Debe quedar claro que el número que se le ponga a cada caso de factorización no es su nombre universal en el idioma de

las Matemáticas, simplemente que como van a numerarse, algún caso tiene que ser el número 1, otro el número 2, y así sucesivamente. En cambio, el nombre con que aparezca cada uno de esos casos sí corresponde a un nombre universal.

2.3.1. Factor Común

Se dice que un polinomio tiene factor común cuando una misma cantidad, ya sea número o variable, se encuentra en todos los términos del polinomio.

Si en todos los términos de un polinomio figura un factor común, dicho polinomio es igual al producto de ese factor por el polinomio que resulta al dividir cada término por ese factor.

Para efectuar el factor común hay que tomar en cuenta que este se realiza tanto para los números como para las variables, y con las variables se toma la que tenga el menor exponente de todas.

Para factorizar una expresión que en todos sus términos aparece por lo menos un factor común, se tiene la siguiente regla:

- Se localizan y se escriben todos los factores comunes en su máxima expresión.
- Se escribe a continuación un paréntesis y dentro de él lo que queda de la expresión original luego de haberle quitado a cada término los factores comunes.
- En caso de que el factor común sea todo uno de los términos de la expresión original, en su lugar se pone 1 .

En la regla anterior, debe quedar claro que la afirmación (luego de haberle quitado a cada término los factores comunes) , no debe entenderse como simplemente borrarlos o desaparecerlos, sino que es equivalente a realizar una división de cada término de la expresión original entre el factor común, ya que lo que se está multiplicando (factor) se quita a través de su operación inversa que es precisamente la división.

Ejemplos :

Ejemplo 1 Factorizar:

$$2a^3b + 7bxy^5$$

- Se localizan y se escriben todos los factores comunes: en este caso es la b . Se escribe a continuación un paréntesis y adentro de él lo que queda de la expresión original luego de haberle quitado a cada término los factores comunes:

$$b(2a^3 + 7xy^5).$$

- Finalmente significa que $2a^3b + 7bxy^5 = b(2a^3 + 7xy^5)$.

Ejemplo 2 Factorizar:

$$4a^2b + 6abx^5$$

- Se localizan y se escriben todos los factores comunes: en este caso es la $2ab$. Se escribe a continuación un paréntesis y adentro de él lo que queda de la expresión original luego de haberle quitado a cada término los factores comunes:

$$2ab(2a + 3x^5).$$

- Finalmente significa que $4a^2b + 6abx^5 = 2ab(2a + 3x^5)$.

Ejemplo 3. Factorizar:

$$12a^4b^3c - 6a^2b^3x^7.$$

- Se localizan y se escriben todos los factores comunes: en este caso es la $6a^2b^3$. Se escribe a continuación un paréntesis y adentro de él lo que queda de la expresión original luego de haberle quitado a cada término los factores comunes:

$$6a^2b^3(2a^2c - x^7).$$

- Finalmente significa que $12a^4b^3c - 6a^2b^3x^7 = 6a^2b^3(2a^2c - x^7)$. Obsérvese que en esta última expresión, la operación principal es la multiplicación.

2.3.2. Factor Común Por Agrupación De Términos

El proceso consiste en formar grupos o agrupar términos en cantidades iguales (de dos en dos, o de tres en tres, etc.), para luego factorizar cada grupo por factor común y finalmente volver a factorizar por factor común, en donde el paréntesis que debe quedar repetido en cada grupo es el factor común. Como regla práctica, el signo del primer término de cada grupo es el signo que debe ponerse en cada factorización por factor común.

Como regla práctica, el signo del primer término de cada grupo es el signo que debe ponerse en cada factorización por factor común.

$$\begin{aligned} x^2 + ax + bx + ab &= (x^2 + ax) + (bx + ab) \\ &= x(x + a) + b(x + a) \\ &= (x + a)(x + b) \end{aligned}$$

*agrupamos en dos grupos
se aplica factor común
se aplica nuevamente factor común*

Una forma de visualizar el Factor Común Por Agrupación De Términos es a través de un cuadrado de lado x . A uno de los lados se le agrega una cantidad a y a otro se le agrega una cantidad b , por lo que se forma una superficie con cuatro regiones como podemos observar en la siguiente figura 2.6:

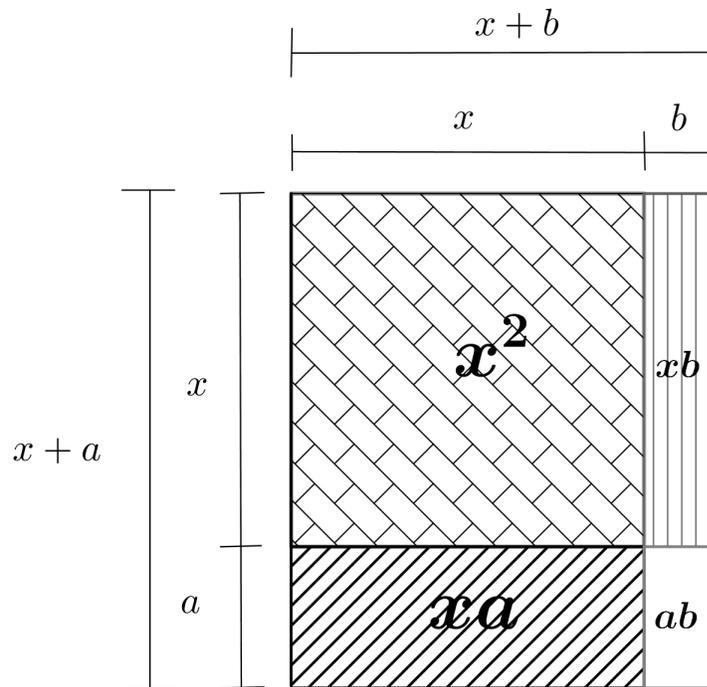


Figura 2.6: Factor Común por agrupación de términos

El área total de la Figura 2.6, está dada por la suma de cada una de las áreas, es decir $x^2 + xb + xa + ab$, la cual también puede ser vista de la forma $(a + x)(b + x)$.

2.3.3. Diferencia De Cuadrados

La diferencia de cuadrados se aplica principalmente en binomios donde el primer término es positivo y el segundo término es negativo; se reconoce porque los coeficientes de los términos son números cuadrados perfectos (es decir números que tienen raíz cuadrada exacta como 1 ; 4 ; 16 ; 25 ; 36 entre otros) y los exponentes de las variables son cantidades pares .

$$\begin{aligned} \text{La igualdad } (x - a)x + (x - a)a &= (x + a)(x - a) \\ &= x^2 - a^2 \end{aligned}$$

la igualdad planteada anteriormente también se puede representar geoméricamente de la siguiente manera:

- Dibujemos un cuadro de lado x :

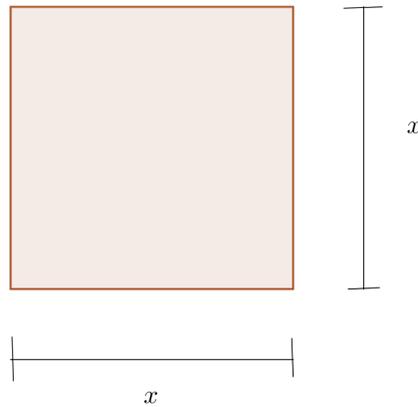


Figura 2.7: Representación Geométrica de $x^2 - a^2$ (paso 1)

- Dividamos al cuadrado según muestra la figura 2.8:

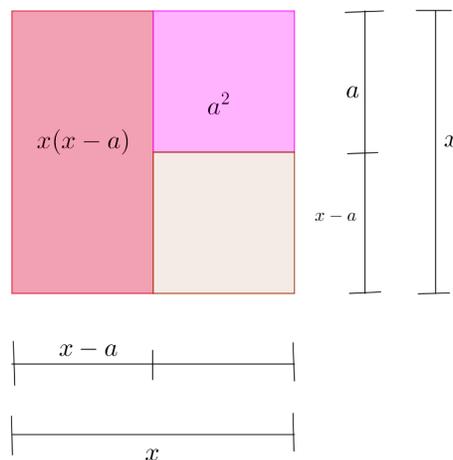


Figura 2.8: Representación Geométrica de $x^2 - a^2$ (paso 2)

- Si la misma figura 2.7 la dibujamos del siguiente modo, podemos observar la igualdad $(x - a)x + (x - a)a = x^2 - a^2$.

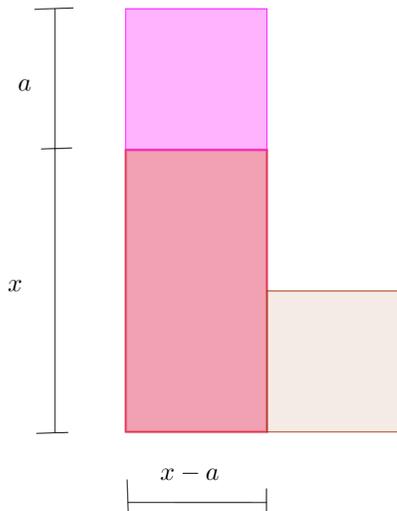


Figura 2.9: Representación Geométrica de $x^2 - a^2$ (paso 3)

De este modo podemos concluir geoméricamente que $(x - a)x + (x - a)a = x^2 - a^2$

2.3.4. Trinomio Cuadrado Perfecto

El trinomio cuadrado perfecto (TCP) debe estar organizado en forma ascendente o descendente (cualquiera de las dos); tanto el primero como el tercer término deben ser positivos, así mismo esos dos términos deben ser cuadrados perfectos, es decir, deben tener raíz cuadrada exacta. En otras palabras el primero y tercer término deben reunir las características de los términos que conforman una diferencia de cuadrados. A continuación se mostrará un resultado analítico para el trinomio cuadrado perfecto de la forma

$$\begin{aligned}
 a^2 + 2ab + b^2 &= a^2 + ab + ab + b^2 \\
 &= (a^2 + ab) + (ab + b^2) \\
 &= a(a + b) + b(a + b) \\
 &= (a + b)(a + b) \\
 &= (a + b)^2
 \end{aligned}$$

*Descomposición de términos semejantes
agrupamos en dos grupos
se aplica factor común
se aplica nuevamente factor común
producto de potencias de igual base.*

También se puede expresar como el cuadrado de un binomio $(a + b)$ y $(a - b)$; es igual al cuadrado del primer término más el doble del producto de los términos más el cuadrado del segundo término; esto es:

Para el caso del binomio $a + b$ se tiene $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Para el caso del binomio $a - b$ se tiene $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Representación geométrica $(a + b)^2$

Consiste en considerar el área de un cuadrado de segmentos $a + b$ y las regiones que estas medidas generan en el cuadrado. Los segmentos a y b horizontales y verticales dividen al cuadrado en cuatro áreas menores: dos cuadrados, uno de lado a y otro menor de lado b , y dos rectángulos de largo a y ancho b . La suma de las áreas de estos cuadrados y rectángulos es igual al área total del cuadrado de lado $a + b$; como se puede evidenciar en la figura 2.10

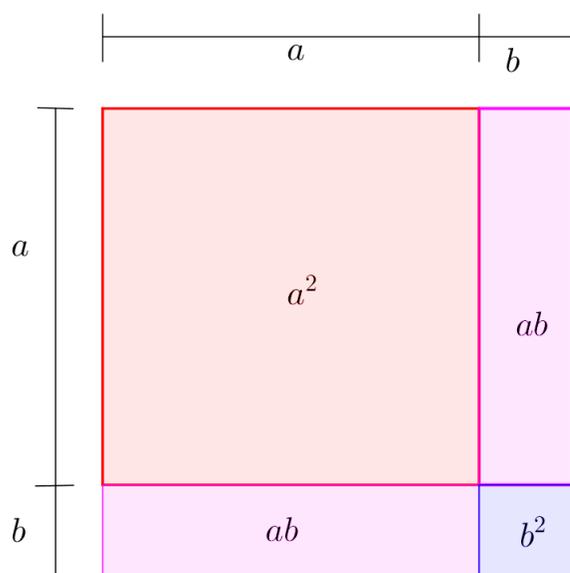


Figura 2.10: Representación Geométrica de $(a + b)^2$

Representación geométrica de $(a - b)^2$

Consiste en considerar el área de un cuadrado de lado a . Los segmentos a y b horizontales y verticales dividen al cuadrado en cuatro áreas menores: dos cuadrados, uno de lado $a - b$ y otro menor de lado b , y dos rectángulos de largo $a - b$ y ancho b . La suma de las áreas de estos cuadrados y rectángulos es igual al área total del cuadrado de lado a . Por lo tanto, el área del cuadrado de $a - b$ es igual al área total menos el área de los rectángulos menos el área del cuadrado menor, esto es:

$$\begin{aligned} (a - b)^2 &= a^2 - 2(a - b)b - b^2 \\ &= a^2 - 2ab + 2b^2 - b^2 \\ &= a^2 - 2ab + b^2 \end{aligned}$$

propiedad distributiva

propiedad distributiva

simplificación de términos semejantes

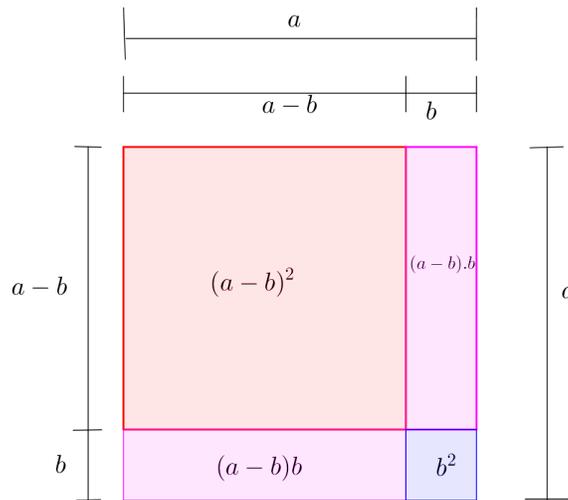


Figura 2.11: Representación Geométrica de $(a - b)^2$

2.3.5. Trinomio De La Forma $x^{2n} + bx^n + c$ con $n \in \mathbf{Z}^+$

El trinomio debe estar organizado en forma descendente; el coeficiente del primer término debe ser (1); el grado (exponente) del primer término debe ser el doble del grado (exponente) del segundo término.

2.3.6. Trinomio De La Forma $ax^{2n} + bx^n + c$ con $n \in \mathbf{Z}^+$

El trinomio debe estar organizado en forma descendente; el coeficiente principal (es decir el primer término) debe ser positivo $a \neq 1$. El grado del (exponente) del primer término debe ser el doble del grado (exponente) del segundo término.

2.3.7. Suma y Diferencia de Cubos Perfectos

Se aplican únicamente en los binomios; donde el primer término es positivo, el segundo término puede ser negativo o positivo; se reconoce fácilmente porque los coeficientes de los términos son números cubos perfectos (números que tienen raíz cúbica exacta como 1; 8; 64; 125 etc) y los exponentes de las variables son múltiplos de tres (3; 6; 9p; 18c ...)

2.4. Recursos Didácticos

Para hablar del concepto de recursos didácticos es importante hacer una revisión de algunos autores, con el propósito de describir el desarrollo de las ideas relacionadas con este concepto y así tener una visión de la concepción del mismo.

Se pueden dar distintas definiciones de lo que es un medio y un material de enseñanza.

Recursos Didácticos. Es cualquier material que se ha elaborado con la intención de facilitar al docente su función y la del alumno. No olvidemos que los recursos didácticos deben utilizarse en un contexto educativo según los propósitos que se busquen con éstos.

Son los materiales o instrumentos que los docentes utilizan para poner al estudiante en contacto con el contenido de una clase nueva o de refuerzo.

²

Didácticos. Pertenece o relativo de la enseñanza. Propio y adecuado para enseñar o instruir.

³

Del mismo modo, la terminología para su designación también es diversa, utilizándose los términos de recurso, recurso didáctico, medio de enseñanza, etc. Bajo estas denominaciones, podemos describirlo como cualquier recurso que el profesor prevee emplear en el diseño o desarrollo del currículo; para aproximar o facilitar los contenidos, mediar en las experiencias de aprendizaje o provocar encuentros o situaciones para facilitar o enriquecer la evaluación.

Por tanto, los materiales son medios o instrumentos indispensables para la práctica educativa y su evaluación. Normalmente, los más usados son los medios impresos como son los libros de texto, diccionarios o cuadernos de trabajo. Sin embargo, también existen otros recursos que son utilizados a diario por el profesor y que pueden aportar mayor variedad y riqueza para desarrollar su trabajo.

Los recursos didácticos según Guerra (2011) se define como *“un conjunto de elementos que facilitan la realización del proceso enseñanza - aprendizaje. Estos contribuyen a que los estudiantes logren el dominio de un contenido determinado. Para que de esta manera los estudiantes logren mejor acceso a la información, la adquisición de habilidades, destrezas y estrategias, como también a la formación de actitudes y valores”*.

Según Jordi Díaz Lucea (1996) define “los recursos y materiales didácticos como el conjunto de elementos, útiles o estrategias que el profesor utiliza, o puede utilizar, como

²Aparicir, García. El Material Didáctico de la UNED. Madrid. 1988

³Diccionario Oceano 2011

soporte, complemento o ayuda en su tarea docente”.

Los recursos didácticos deberán considerarse siempre como un apoyo para el proceso educativo.

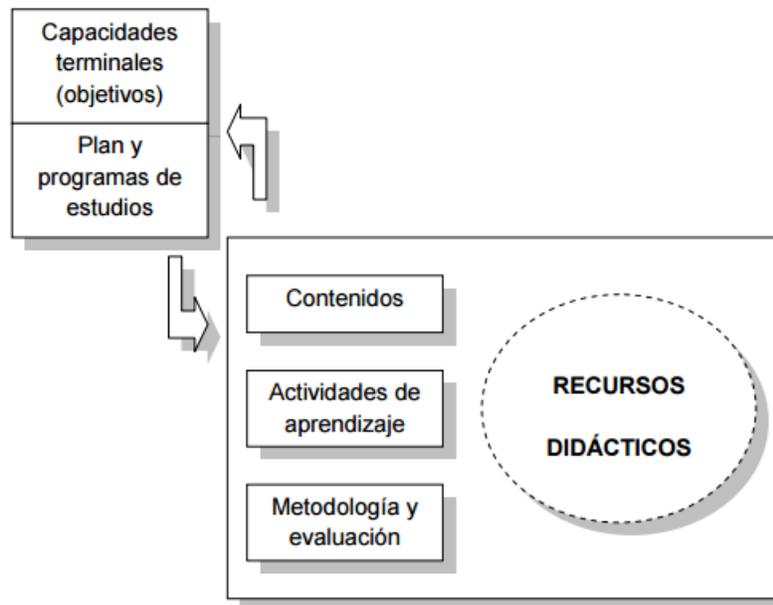


Figura 2.12: **Función de los recursos didácticos**

El término recurso didáctico tiene dos acepciones distintas. En general, los diferentes recursos y materiales didácticos pueden referirse a todos los elementos que un centro educativo debe poseer, desde el propio edificio a todo aquel material de tipo mobiliario, audiovisual, bibliográfico, etc. Desde una perspectiva diferente, los recursos, son también aquellas estrategias que el profesor utiliza como facilitadoras de la tarea docente, referidas tanto a los aspectos organizativos de las sesiones como a la manera de transmitir los conocimientos o contenidos.

Si bien, los recursos y materiales didácticos no son los elementos más importantes en la educación escolar, pues el papel primordial corresponde al elemento humano (profesor y alumno), algunos de ellos resultan imprescindibles para poder realizar la práctica educativa.

Fullan(1994) indica que “*Los recursos para el aprendizaje cumplen una función mediadora entre la intencionalidad educativa y el proceso de aprendizaje, entre el educador y el educando, esta función mediadora general se desglosa en diversas funciones específicas que pueden cumplir los recursos en el proceso formativo: estructuradora de la realidad, motivadora, controladora de los contenidos de aprendizaje, innovadora, etc. En cualquier caso, los recursos desempeñan funciones de tanta influencia en los procesos educativos, cualquier innovación comporta inevitablemente el uso de materiales curriculares distintos a los utilizados habitualmente*”.

Funciones De Los Recursos Didácticos

Los recursos didácticos deben cumplir con las funciones básicas de soporte de los contenidos curriculares y convertirse en elementos posibilitadores de las actividades de enseñanza-aprendizaje.

Para el desarrollo de las clases, los recursos didácticos pueden ser muy útiles para facilitar el logro de los objetivos (capacidades terminales) que estén establecidos.

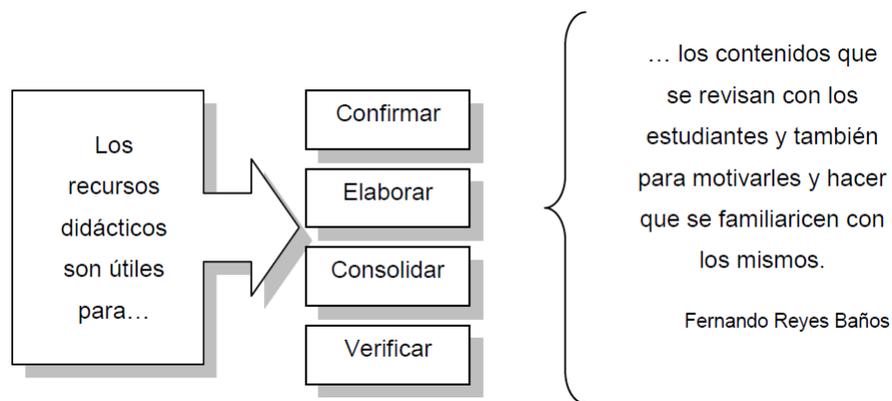


Figura 2.13: **Utilidad de los recursos didácticos**

De manera más concreta y bajo una perspectiva amplia, según Jordi Díaz Lucea, se puede decir que los diferentes materiales y recursos didácticos deben cumplir principalmente con las siguientes funciones:

- **Función motivadora:** deben ser capaces de captar la atención de los alumnos mediante un poder de atracción caracterizado por las formas, colores, tacto, acciones, sensaciones, etc.
- **Función estructuradora:** ya que es necesario que se constituyan como medios entre la realidad y los conocimientos, hasta el punto de cumplir funciones de organización de los aprendizajes y de alternativa a la misma realidad.
- **Función estrictamente didáctica:** es necesario e imprescindible que exista una congruencia entre los recursos materiales que se pueden utilizar y los objetivos y contenidos objeto de enseñanza.
- Los materiales contribuyen a concretar y orientar la acción docente en la transmisión de los conocimientos o aprendizajes teniendo en cuenta que su elección depende de los requerimientos particulares del proyecto, de las reglas institucionales, y de las particularidades del grupo de clase que determinan las prácticas pedagógicas en los centros escolares. Así mismo, resultaría recomendable preguntarse qué merece la pena enseñar y por qué, y cómo presentamos el contenido seleccionado.

- Función de soporte al profesor: referida a la necesidad que el docente tiene de utilizar recursos que le faciliten la tarea docente en aquellos aspectos de programación, enseñanza, evaluación, registro de datos, control, etc.

Clasificación de los recursos didácticos

los recursos o materiales didácticos suelen clasificarse en tres grandes dimensiones:

Recursos convencionales:

- Impresos: libros, fotocopias, periódicos, documentos.
- Tableros didácticos: pizarra...
- Materiales manipulativos: recortables, cartulinas.
- Juegos: arquitecturas, juegos de sobremesa.
- Materiales de laboratorio.

Recursos audiovisuales:

- Imágenes fijas proyectables: diapositivas, fotografías.
- Materiales sonoros: cassettes, discos, programas de radio.
- Materiales audiovisuales: montajes audiovisuales, películas, videos, programas de televisión...

Nuevas tecnologías:

- Programas informáticos.
- Servicios telemáticos: páginas web, correo electrónico, chats, foros.
- TV y video interactivos.

2.5. Algunos Recursos Didácticos

A continuación se presentan sistemáticamente los recursos didácticos (juegos cotidianos) presentes en este trabajo de grado, dado a que éstos contribuyen al refuerzo de los casos de factorización y el aprendizaje colectivo y significativo en los estudiantes del grado octavo.

2.5.1. Dominó Algebraico

El dominó es un juego de mesa tradicional ampliamente conocido por los estudiantes; nos parece una excelente alternativa, ya que permite asociar polinómios con su respectiva factorización, a través de este juego se puede determinar si los estudiantes saben factorizar trinómios cuadrados perfectos.

2.5.2. El Póquer

El Póquer puede tener otras connotaciones más allá de un juego de azar, usado en su mayoría en casinos o centros de diversión. En la parte educativa se pueden encontrar grandes beneficios, ya que promueve el desarrollo de la concentración y de la memoria, ayuda a desarrollar una mente estructurada y potencia el razonamiento en cuanto a las dificultades que presentan los estudiantes a la hora de factorizar determinadas expresiones algebraicas.

2.5.3. Álgebra Geométrica

El Álgebra Geométrica es un conjunto de figuras tales como el rectángulo y el cuadrado con dimensiones específicas, que posibilitan la enseñanza y el aprendizaje de las operaciones básicas de los polinómios algebraicos.

2.5.4. Juego De Mesa “Baraja ”

Para participar en esta actividad de afianzamiento de conocimientos y habilidades en la “factorización de polinómios” el estudiante previamente interioriza los procedimientos, los llama por su nombre teórico y realiza todas las actividades propuestas en cada una de los talleres propuestos por el docente, las cuales deben brindar los fundamentos para la búsqueda de los ceros y factores de un polinómio.

CAPÍTULO 3

METODOLOGÍA

En este capítulo se dan a conocer de manera detallada cada uno de los pasos que se llevaron a cabo para cumplir cada uno de los objetivos propuestos en esta investigación.

El proceso seguido para llevar a cabo el motivo de esta investigación se originó al observar en nuestras prácticas docentes las dificultades en el aprendizaje de los métodos de factorización que presentaban los estudiantes de secundaria, especialmente los estudiantes del grado octavo.

Posterior a ello se planteó como trabajo de grado generar un documento útil en el cual se dieran a conocer algunos recursos didácticos para los docentes, como herramienta útil para el afianzar los métodos de factorización.

Este proyecto se desarrolló en cuatro fases de investigación:

Fase 1.

Para recopilar y seleccionar los recursos didácticos nuestras fuentes principales de información fueron:

- El trabajo de grado de Maria Isabel Blanco Sanchez titulado *Recursos didácticos para fortalecer la enseñanza - aprendizaje de la economía* realizada en el año 2012, donde la propuesta fue describir detalladamente los recursos didácticos con mayor influencia en la economía; de donde se tuvieron en cuenta aspectos teóricos en relación a los recursos didácticos.
- El trabajo de grado de Faizal Sánchez González titulado *Diseño y Aplicación De Una Estrategia Lúdica Para La Enseñanza - Aprendizaje De La Factorización De Polinomios* en el año 2015, donde la propuesta fue el diseño de una propuesta pedagógica tipo Juego de Mesa con una estrategia didáctica y lúdica de acercamiento a la factorización de polinomios, dirigida a estudiantes del grado undécimo; de este trabajo se tuvo en cuenta el recurso didáctico llamado el juego de la baraja ya que este se adecuaba muy bien con nuestros propositos.

- El trabajo de investigación de Diana Carolina Jimenez Esteban y Yudi Rosmira Márques Porras titulado el *Juego como recurso didáctico para reforzar métodos de factorización en el grado octavo* presentada en el año 2009 donde la propuesta fue aplicar cinco juegos de la vida cotidiana para reforzar los casos de factorización de polinomios; de esta investigación se tomó la idea de diseñar el recurso didáctico llamado el dominó algebraico.
- La investigación realizada por Luz Stella Botero Ramírez en el año 2014 titulada *Diseño de una estrategia didáctica para la enseñanza de la factorización utilizando geometría* donde la propuesta fue diseñar e implementar una estrategia didáctica para la enseñanza de los temas de factorización utilizando geometría de donde se tuvo en cuenta la información para complementar el recurso didáctico del algebra geométrica en nuestro trabajo de grado.
- El trabajo de grado de Andriws Giovanni De Los Rios titulado *EL Póquer Como Propuesta Lúdica Para Afianzar El Conocimiento De Los Primeros 7 Casos de Factorización* realizada en el año 2016, donde se planteo el Diseño de un ejercicio lúdico basado en el póquer para afianzar el conocimiento en los primeros siete casos de factorización de los estudiantes del grupo 1002, Técnico Laboral en Auxiliar Contable del Centro de Formación Bancaria; de esta fuente de información tuvimos en cuenta el recurso didáctico del póquer gracias a su utilidad y adecuación con nuestros intereses.

Fase 2

Para caracterizar los recursos didácticos considerando los aspectos teóricos, se tuvo en cuenta la revisión de los conceptos y aportes de distintos pensadores, en cuanto a la definición, clasificación, función y utilidad de los recursos didácticos en el contexto educativo; dado a que los recursos didácticos son una parte muy importante del proceso de enseñanza - aprendizaje, debido a que brindan un vínculo directo de los estudiantes con la realidad del contexto físico y social, pues además de la información que se le suministre a los estudiantes, ellos necesitan crear, manipular, vivenciar diversos medios y recursos que los motiven a participar activamente en el proceso educativo, fomentando el cuestionamiento, la discusión, el debate, la interacción, la experiencia, en un escenario donde se facilite la comunicación con el docente y con su capacidad de evidenciar que los medios y recursos didácticos fueron realmente útiles en la construcción de su aprendizaje.

Fase 3

La validación de los recursos didácticos se llevó a cabo por juicio de dos expertos la profesora Magister Martha Cecilia Mosquera Urrutia y el profesor Magister Johnny Fernando Alvis Puentes, quienes analizaron detalladamente cada uno de los recursos didácticos, determinando que estos son adecuados y muy importantes para afianzar los casos de factorización, dado a que permiten a los docentes interactuar con los alumnos y así generar un aprendizaje significativo y colectivo, donde cada alumno es participe y a medida que se divierte con los recursos didácticos “juegos” aprende de manera fácil

solucionando así una de las tantas dificultades que se les presenta a la hora de abordar los casos de factorización.

Fase 4

Los alcances y limitaciones de los recursos didácticos, se llevaron a cabo mediante la elaboración de cada uno de ellos en material concreto y las instrucciones que se deben tener en cuenta a la hora de la puesta en marcha, especificando para que caso de factorización se puede utilizar cada recurso.

CAPÍTULO 4

RECURSOS DIDÁCTICOS PARA AFIANZAR LOS CASOS DE FACTORIZACIÓN

4.1. Recursos Didácticos

4.1.1. Dominó Algebraico

Definición

El dominó es un juego de mesa tradicional ampliamente conocido por los estudiantes; y es una excelente alternativa, ya que permite asociar polinomios con su respectiva factorización. A través de este recurso didáctico se puede evidenciar si los estudiantes tienen idea del proceso para factorizar trinomios cuadrados perfectos.

Objetivo

El dominó algebraico como recurso didáctico permite afianzar el proceso de la factorización de trinomios cuadrados perfectos, por que mediante este recurso los estudiantes comprenden, analizan y desarrollan los diferentes ejercicios planteados con más facilidad.

Diseño

Este Recurso Didáctico está conformado por 28 fichas rectangulares divididas en dos partes; en cada parte hay un término que es el cuadrado de un binomio o el desarrollo del cuadrado de un binomio (cuadrado perfecto). A continuación se muestran los ejercicios planteados en las fichas del dominó:

$$(x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$$

$$\left(x + \frac{4}{3}\right)^2 = x^2 + \frac{8}{3}x + \frac{16}{9}$$

$$(x - 5)^2 = x^2 - 10x + 25$$

$$(3x + 5)^2 = 9x^2 + 30x + 25$$

$$(x^3 + 5)^2 = x^6 + 10x^3 + 25$$

$$(2x + a^3)^2 = 4x^2 + 4xa^3 + a^6$$

$$(x + \frac{1}{2})^2 = x^2 + x + \frac{1}{4}$$

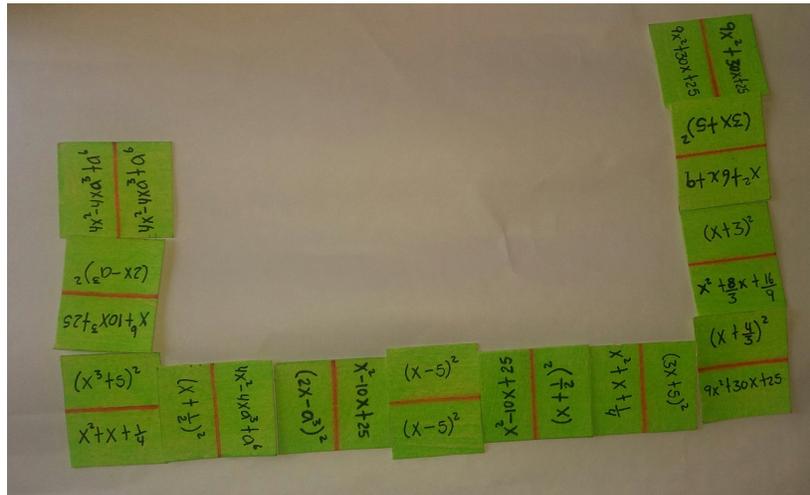


Figura 4.1: Dominó Algebraico

Instrucciones para utilizar el Recurso Didáctico

- Se posee 4 dominós, cada dominó contiene ejercicios diferentes sobre el caso de factorización trinomio cuadrado perfecto y cada dominó tiene color diferente (naranja , rojo ,verde y amarillo) con el fin de rotar los dominós cada vez que los grupos terminen la partida.
- Para comenzar la partida se colocan las 28 fichas boca abajo y se revuelven.
- A cada jugador se le debe hacer entrega de 7 fichas boca abajo.
- El jugador que sacó mayor puntaje en el dado inicia la partida colocando una ficha doble, que puede tener en ambos extremos el cuadrado de un binomio o el desarrollo del cuadrado de un binomio.
- El siguiente jugador debe colocar a continuación una ficha cuyos términos en cualquiera de las partes sea equivalente a los términos que figuran en los extremos de la primera ficha .

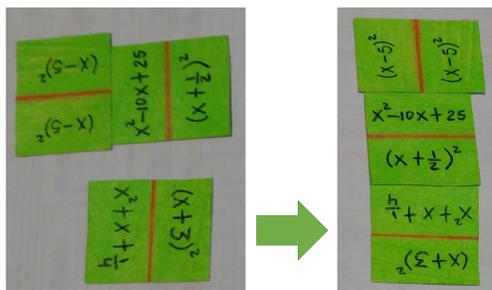


Figura 4.2: Ejemplo Instrucción cinco

- De la misma forma procede el siguiente, con respecto a las fichas que están sobre la mesa.
- Las fichas dobles, es decir, las que tienen el mismo término en los dos extremos se colocan frente a la hilera de fichas al revés en otras palabras cambiar de posición.

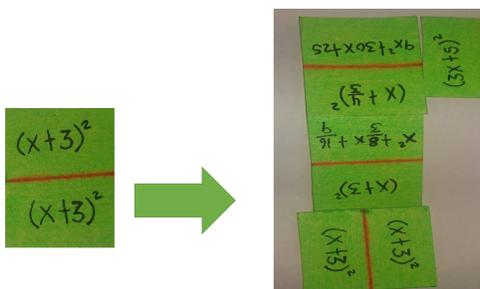


Figura 4.3: Ejemplo Instrucción siete

- El juego continúa hasta que uno de los jugadores consiga colocar todas sus fichas o hasta que todos deban perder su turno. En este último caso gana el jugador que quede con menos fichas.

Reglas del Recurso en Acción

- Cada grupo debe de estar compuesto por 4 estudiantes.
- Los estudiantes no pueden utilizar los apuntes.
- No se podrá hacer preguntas durante el juego, estas las podrá hacer antes de iniciar.
- Antes de iniciar la partida cada jugador debe lanzar un dado y el que saque mayor puntaje iniciará el juego.
- Se debe contabilizar en un cronómetro 1 minuto para resolver el caso de factorización trinomio cuadrado perfecto, si no lo logra perderá su turno.

- El jugador que no puede colocar fichas en ninguno de los dos extremos pierde el turno.
- El turno de jugar será inmediatamente para el jugador que se encuentre a la derecha del que acaba de jugar.
- El juego continúa hasta que uno de los jugadores consigue colocar en todas sus fichas o hasta que ninguno de los jugadores pueda continuar, en este último caso gana el jugador al que le queden menos fichas .

4.1.2. “La Baraja”

Definición

“La baraja” es un juego que consta de una lista de polinomios con sus respectivos factores; es de anotar que algunos factores se repiten, lo que ayuda a aumentar la posibilidad de factorizar el polinomio de manera más rápida.

Objetivo

“La baraja” permite afianzar los diferentes casos de factorización, porque el juego consta de una baraja de cartas dividida a la vez en dos mazos diferentes; un mazo de cartas contiene distintas clases de polinomios y el otro mazo contiene sus respectivos factores, en la cual los estudiantes podrán solucionar los ejercicios comodamente y disfrutar del juego.

Diseño

El juego de mesa diseñado para máximo cuatro jugadores, consiste en una baraja compuesta de 50 cartas divididas a la vez en 2 mazos diferentes, El primero de ellos posee 20 cartas en las que están impresos los polinómios a factorizar y las otras 30 cartas son los posibles factores correspondientes al mazo de los polinómios, los mazos se distinguen fácilmente por tener colores diferentes. Además el juego contiene dos tablas una con la puntuación y la otra es para el registro de los jugadores y su puntuación en cada partida.

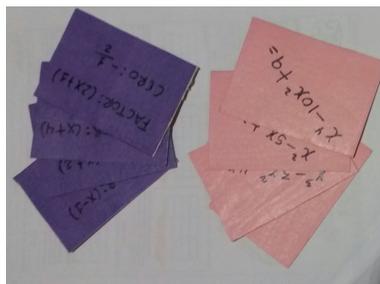


Figura 4.4: Baraja de Cartas

A continuación se muestran los polinomios y los factores que componen las cartas:

1. $2x^3 - 3x^2 - 11x + 6 = (x + 2)(x - 3)(2x - 1)$
2. $x^4 - 15x^2 + 10x + 24 = (x + 1)(x - 2)(x - 3)(x + 4)$
3. $4x^3 + 5x^2 - 4x - 5 = (4x + 5)(x - 1)(x + 1)$
4. $x^3 - 3x^2 - 4x = (x - 4)(x - 0)(x - 1)$
5. $2x^3 - 3x^2 - 3x + 2 = (2x - 1)(x - 2)(x + 1)$
6. $5x^2 - 14x - 3 = (5x + 1)(x - 3)$
7. $x^2 - 5x + 4 = (x - 4)(x - 1)$
8. $5x^2 - 9x - 2 = (5x + 1)(x - 2)$
9. $x^3 + 8x^2 - x - 8 = (x + 8)(x + 1)(x - 1)$
10. $x^3 - 4x^2 - x + 4 = (x - 4)(x + 1)(x - 1)$
11. $x^2 + 5x + 4 = (x + 4)(x + 1)$
12. $x^2 + 2x - 3 = (x - 1)(x + 3)$
13. $x^2 + 4x + 3 = (x + 1)(x + 3)$
14. $x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = (x - 2)(x + 1)(x + 3)$
15. $x^4 - 10x^2 + 9 = (x + 1)(x + 3)(x - 1)(x - 3)$
16. $2x^2 - 7x + 3 = (2x - 1)(x - 3)$
17. $3x^3 + x^2 - 12x - 4 = (x - 2)(3x + 1)(x + 2)$
18. $6x^3 + 5x^2 - 2x - 1 = (3x + 1)(x + 1)(2x - 1)$
19. $2x^3 + x^2 - 18x - 9 = (x - 3)(2x + 1)(x + 3)$
20. $x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 8x + 12 = (x + 2)(x - 2)(x + 1)(x - 3)$

Figura 4.5: Los polinomios y sus factores

Instrucciones del Recurso Didáctico

- PASO 1: Se coloca en el centro de la mesa la **tabla de registro de puntuación**, para registrar cada jugador y el puntaje que obtenga en cada partida. Cuando se de por finalizada la última partida, se deben sumar los puntajes de cada jugador, para así poder determinar el ganador del juego.
- PASO 2: Suponiendo que ya se han barajado por separado cada uno de los mazos de cartas.
- PASO 3: Se toma un polinomio al azar del mazo de polinomios y se expone en el centro de la mesa para que los jugadores lo tengan a la vista.

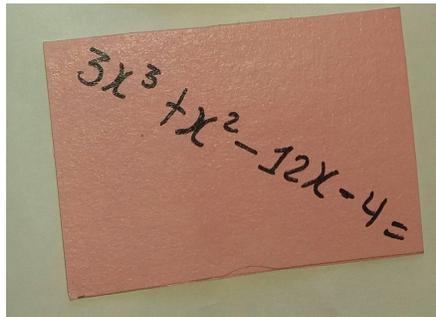


Figura 4.6: Carta del mazo de polinomios

- PASO 4: Del mazo de los factores, se reparten cuatro cartas a cada jugador.



Figura 4.7: Entrega de las cartas de factores a cada jugador

- PASO 5: Los jugadores realizan los cálculos necesarios en una hoja de papel, para averiguar si entre sus cartas existe un factor del polinomio destapado, con las técnicas preferidas vistas en clase y si todos los otros jugadores lo permiten, con el apoyo de una calculadora.
- PASO 6: El jugador de turno que encuentre uno de los factores del polinomio, podrá ir colocando éste al lado del polinomio (lo que en la jerga de la baraja es el llamado descarte).

En este caso, el (Jugador 1) posee entre sus cartas un factor del polinomio, el factor $(3x + 1)$ y lo ubica al lado o debajo de la carta polinomio.

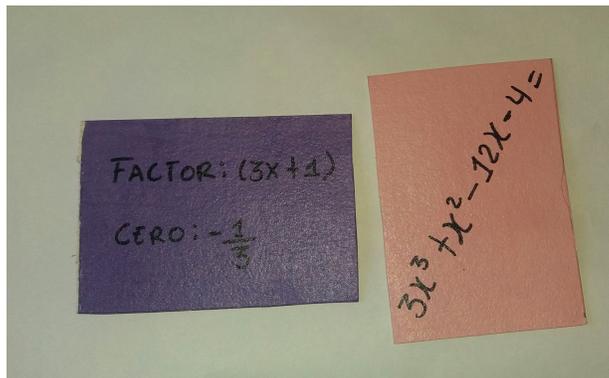


Figura 4.8: El Jugador 1 coloca un factor del polinomio

- El siguiente turno es para el jugador que está a la derecha del que acaba de jugar, si también encontró un factor, lo debe ubicar al lado o debajo de la carta polinomio,

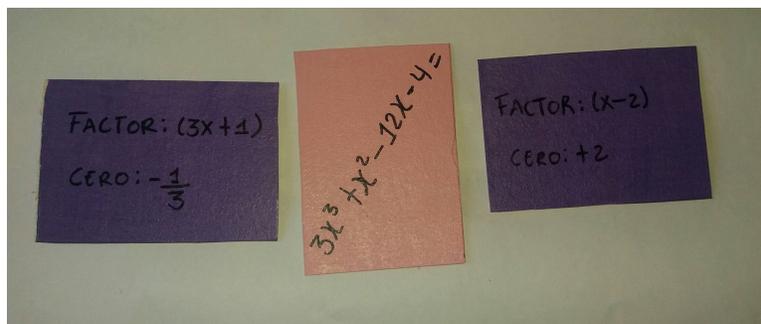


Figura 4.9: La Baraja Paso 6

- PASO 7: Si en el turno siguiente o en cualquier turno el jugador que no posee entre sus cartas algún factor que haga parte de la factorización del polinomio, tendrá derecho a cambiar dos de sus cartas y debe esperar de nuevo su turno mientras realiza de nuevamente los cálculos.
- PASO 8: El polinomio quedaría factorizado cuando uno o varios de los jugadores aportan los factores necesarios.
- PASO 9: El jugador ganador de la partida es aquel que más factores aportó en la factorización del polinomio y recibirá la mayor puntuación según la **tabla de puntuación**.

En este caso, el polinomio ya está factorizado, podemos observar que el (Jugador 1) es el ganador ya que aportó dos de los factores, quedando este con el menor número de cartas en su poder que los demás jugadores.

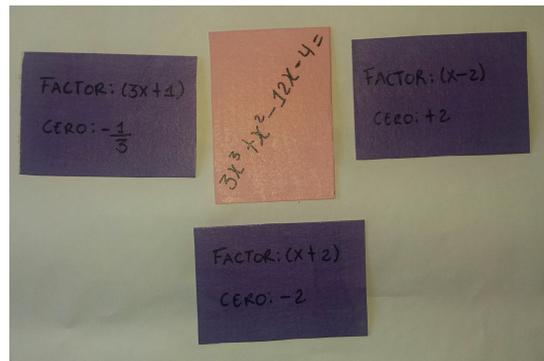


Figura 4.10: Polinomio Factorizado

- PASO 10: Los otros jugadores recibirán una puntuación, la cual dependerá de la cantidad de cartas que hayan aportado a la factorización del polinomio.

Reglas del Recurso en Acción

- Cada grupo debe de estar compuesto por 4 estudiantes.
- Los estudiantes no pueden utilizar los apuntes.
- No se podrá hacer preguntas durante el juego , estas las podrá hacer antes de iniciar.
- El docente debe verificar que los estudiantes estén solucionando correctamente los ejercicios planteados en el recurso didáctico; de lo contrario el docente debe aclarar o especificar a los estudiantes el desarrollo correcto del ejercicio.
- Registrar en la **tabla de registro de puntuación** cada jugador y el puntaje que obtenga en cada partida. Al finalizar seis partidas se deben sumar horizontalmente los puntajes de cada jugador, para así poder determinar el ganador del juego. El ganador será el que obtenga mayor puntuación.
- Se debe contabilizar en un cronómetro 2 minutos para realizar los cálculos necesarios, desarrollados en una hoja de papel, para saber si sus factores son o no pertenecientes al polinomio a factorizar, si se cumplen los 2 minutos y no ha realizado los cálculos perderá el turno.
- Antes de iniciar la partida cada jugador debe lanzar un dado y el que saque mayor puntaje iniciará el juego, mezclará cada mazo de cartas y repartirá las cartas a cada jugador.
- El turno para jugar siempre será para el jugador que se encuentre a la derecha del que acaba de jugar.
- Se barajan o mezclan los mazos de polinómios y de los factores por separado.

- Se toma un polinomio al azar para ser factorizado, se expone en el centro de la mesa para que los jugadores lo tengan a la vista.
- Del mazo de los factores, se reparten cuatro cartas a cada jugador.
- El jugador de turno que encuentre uno de los factores del polinomio puede ir colocando su (carta de factor) al lado del polinomio a factorizar (lo que en la jerga es llamado el descarte).
- Si se llega a presentar un empate por parte de los participantes se distribuye la puntuación de manera equitativa según el caso (primero, segundo, tercero o cuarto lugar)
- Tabla de puntuación.

Factores aportados al polinomio	Posición	Puntuación
Aporto 2 o más cartas	Primer lugar	5
Aporto 1 carta	Segundo lugar	3
No aporto cartas	Tercer lugar	0
No aporto cartas	Cuarto lugar	0

Cuadro 4.1: Tabla de puntuación

- Tabla de registro de puntuación

	Partida 1	Partida 2	Partida 3	Partida 4	Partida 5	Partida 6	Total
Jugador 1							
Jugador 2							
Jugador 3							
Jugador 4							

Cuadro 4.2: Tabla de registro de puntuación

4.1.3. El Póquer Algebraico

Definición

El póquer es un juego de mesa tradicional muy conocido por los estudiantes, que consta de 40 variables, 62 constantes, 26 símbolos (suma, resta y parentesis) y 99 billetes de distintas denominaciones(1.000, 2.000, 5.000, 10.000, 20.000 y 50.000).

Objetivo

Este recurso didáctico permite medir el nivel de conocimientos sobre los primeros 7 casos de factorización, además de la diferenciación entre constantes y variables en los aprendizajes concretos de los estudiantes del grado octavo.

Diseño

El recurso didático “El póquer” se conforma de constantes donde el fondo de la carta es de color rojo, variables donde el fondo de la carta es de color amarillo, simbolos donde el fondo de la carta es de color naranja y billetes de distintas denominaciones como se pueden observar en la siguiente ilustración.



Figura 4.11: “El póquer”



Figura 4.12: Billetes

Instrucciones del Recurso Didáctico

- El grupo de estudiantes designa un Repartidor quien va a ser el encargado de barajar, repartir las cartas, el dinero a los cuatro participantes y verificar el caso de factorización propuesto por él.
- Barajar todas las cartas (constantes, variables y símbolos).
- El repartidor entrega cuatro cartas y 20000 pesos a cada participante .



Figura 4.13: Repartición de cartas en “El póquer”

- El repartidor escoge un caso de factorización y se los da a conocer a los participantes.
- Cada miembro del grupo revisa sus cartas para tratar de formar el caso de factorización escogido por el repartidor. Pues el que logre formar ese caso de factorización será el ganador del acumulado de la apuesta.
- Cumplidos dos minutos el Repartidor solicita que se haga una apuesta mínima de 4000 pesos y máxima de 10000 pesos, al primer participante de su derecha le pregunta si necesita cartas o si de lo contrario va a hacer entrega de algunas, esto se hace de manera consecutiva con los demás participantes teniendo en cuenta que la apuesta mínima debe ser igual o mayor que la del compañero que acabo de apostar.
- Si algún participante necesita más cartas adicionales a las que le entregaron inicialmente, el repartidor le podrá entregar en ese momento máximo dos cartas.



Figura 4.14: Entregar máximo dos cartas adicionales en “El póquer”

- Las cartas que no utilice en el caso de factorización las deberá entregar al repartidor.
- La anterior acción se realiza consecutivamente hasta que un participante en voz alta exclame: “Me planto” en ese momento terminan las apuestas y el jugador debe mostrar el caso de factorización que el repartidor al inicio mencionó, se ganará el acumulado de la apuesta si es correcto.



Figura 4.15: Ejemplo de un caso de factorización

- Luego de conocer el ganador de la primera partida, el repartidor entrega dos cartas adicionales a cada participante y se da comienzo a la nueva partida.
- Al finalizar la partida seis, se conocerá el ganador, pues es aquel que obtenga mayor cantidad de dinero durante el juego.

Reglas del Recurso en acción

- Cada grupo debe de estar compuesto por 4 estudiantes.
- Los estudiantes no pueden utilizar los apuntes.
- No se podrá hacer preguntas durante el juego, estas las podrá hacer antes de iniciar.
- Se debe contabilizar en un cronómetro dos minutos para que cada participante arme el caso de factorización.

Función del Repartidor

- Entregar cuatro cartas a cada participante.
- Escoger un caso de factorización y dárselo a conocer a los participantes para que lo construyan con sus cartas.
- Debe contabilizar dos minutos como máximo para que los jugadores armen el caso de factorización especificado por él.
- El repartidor debe contabilizar que los participantes deben jugar seis partidas para conocer el ganador.

- Cumplidos dos minutos el Repartidor solicita que se haga una apuesta mínima de 4000 pesos y máxima de 10000 pesos al primer participante de su derecha y le pregunta si necesita cartas o si de lo contrario va a hacer entrega de algunas, esto se hace de manera consecutiva con los demás participantes teniendo en cuenta que la apuesta mínima debe ser igual o mayor que la del compañero que acabo de apostar.
- Si algún participante necesita más cartas adicionales a las que le entregaron inicialmente, el repartidor le podrá entregar máximo dos.
- El repartidor debe recibir las cartas que los participantes no vayan a utilizar en el caso de factorización.

Función del Participante

- Cada participante debe contar sus cartas entregadas por el Repartidor, para verificar que cuenta con la misma cantidad de los demás, si esto no se da, debe pedirle al Repartidor que le entregue la cantidad faltante.
- No debe bajo ninguna circunstancia dejar ver a los otros miembros del juego sus cartas, aunque el dinero siempre debe estar encima de la mesa.
- Pedir un máximo de dos cartas por partida.
- Las cartas que no utilice en el caso de factorización las debiera entregar al repartidor.

4.1.4. El Álgebra Geométrica

Definición

El sistema simbólico que utiliza el álgebra geométrica para transmitir la información son los rectángulos y cuadrados que la conforman. La aplicación en el aula tiene implicaciones pedagógicas, por ejemplo, proporciona al estudiante por medio de la representación geométrica, que ellos capten mejor lo concreto de lo verbal y lo abstracto.

Objetivo

El álgebra geométrica sirve de soporte y actúa como instrumento de mediación para acceder al conocimiento, que para nuestro caso es el aprendizaje de la factorización. No siempre se tiene disponible la infraestructura o las herramientas necesarias para la enseñanza en los diferentes centros de estudio. Por lo tanto, se deben utilizar materiales que permitan su elaboración con los estudiantes.

Permite que el estudiante con ejercicios de aplicación, logren aprender la nueva información con los saberes previos que se tenían

Diseño

Para emplear el álgebra geométrica se deben elaborar las siguientes figuras:

- 4 cuadrados de 13 cm \times 13 cm de color azul.



Figura 4.16: Cuadrado de área x^2

- 4 cuadrados de 8 cm \times 8 cm de color rojo.



Figura 4.17: Cuadrado de área y^2

- 4 rectángulos de 13 cm \times 8 cm de color amarillo.



Figura 4.18: Rectángulo de área xy

- 15 Rectángulos de 13 cm \times 2 cm de color negro.

Figura 4.19: Rectángulo de área x

- 15 Rectángulos de 8 cm \times 2 cm de color verde.

Figura 4.20: Rectángulo de área y

- 70 Cuadrados de 2 cm \times 2 cm de color rosado.



Figura 4.21: Cuadrado de área 1

Instrucciones Del Recurso Didáctico

Se explica a los estudiantes la manera como se utilizan los rectángulos y cuadrados: Primero se resuelve una expresión algebraica en forma tradicional y luego se pasa a reemplazar cada término por una de las figuras recortadas, así:

- $x^2 + 2x + 1$ esta expresión factorizada es

Figura 4.22: Representación geométrica de $x^2 + 2x + 1$

Los cuadriláteros utilizados son: $x^2 + 2x + 1$, los cuales se colocan de manera que sus lados coincidan con la medida exacta y siempre se busca formar un cuadrado o un rectángulo.



Figura 4.23: Factorización geométrica de $x^2 + 2x + 1 = (x + 1)(x + 1)$

La figura formada es:

En este ejemplo se forma un cuadrado perfecto, la base corresponde a $(x + 1)$ y la altura a $(x + 1)$.

- $x^2 + x \cdot y$ esta expresión factorizada es:

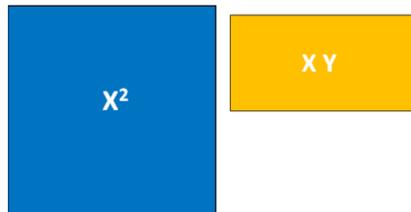


Figura 4.24: Representación geométrica de $x^2 + x \cdot y$

La figura formada es:



Figura 4.25: Representación geométrica de $x^2 + x \cdot y = x(x + y)$

En este ejemplo se forma un rectángulo, la base corresponde a x y la altura a $(x + y)$.

- $x^2 - x \cdot y$ esta expresión factorizada es:

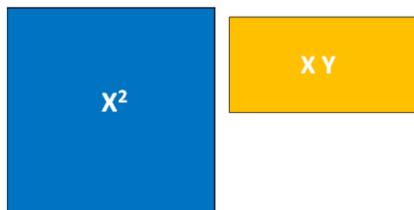


Figura 4.26: Representación geométrica de $x^2 - x \cdot y$

La figura formada es:

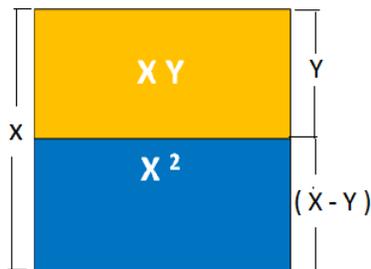


Figura 4.27: Representación geométrica de $x^2 - x \cdot y = x(x - y)$

En este ejemplo se forma un rectángulo, la base corresponde a x y la altura a $(x - y)$.

- $x \cdot y + 3x + 2y + 6$ esta expresión factorizada es:



Figura 4.28: Representación geométrica de $x \cdot y + 3x + 2y + 6$

La figura formada es:

XY	Y	Y
X	1	1
X	1	1
X	1	1

Figura 4.29: Representación geométrica de $x \cdot y + 3x + 2y + 6 = (x + 2)(y + 3)$

En este ejemplo se forma un rectángulo, la base corresponde a $(x + 2)$ y la altura a $(y + 3)$.

- $x^2 - y^2$ esta expresión factorizada es:

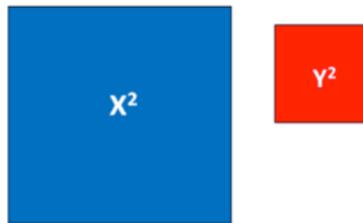


Figura 4.30: Representación geométrica de $x^2 - y^2$

La figura formada es:

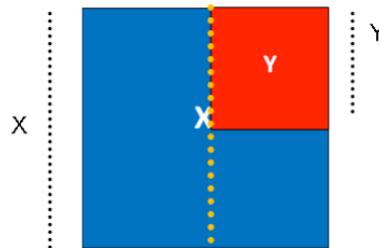


Figura 4.31: Representación geométrica de $x^2 - y^2$

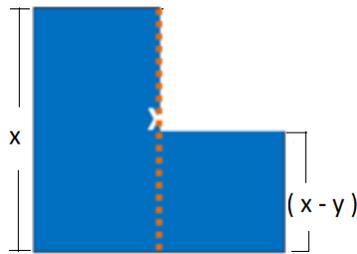


Figura 4.32: Representación geométrica de $x^2 - y^2 = x(x - y) + y(x - y)$

- Cada estudiante debe estar muy concentrado, visualizando la dinámica del profesor con las figuras e ir haciendo lo mismo con las suyas. El profesor hace ejercicios pegando los cuadrados y rectángulos en el tablero y explica el proceso para formar la figura según el caso, teniendo en cuenta el valor que se obtiene en la base y en la altura de ésta.

4.2. Recomendaciones de los expertos

Los recursos didácticos presentados en este trabajo fueron evaluados, por dos expertos como la profesora Magister Marta Cecilia Mosquera Urrutia y el profesor Magister Johnny Fernando Alvis Puentes, quienes hicieron las siguientes recomendaciones:

Profesora Magister Marta Cecilia Mosquera Urrutia :

- Debería mostrarse las 28 operaciones y no todos deberían ser de la misma forma.
 Por ejemplo: Tomar casos combinados; en $ax^2 + bx + c$ con $a \neq 0$; formar polinomios de la forma $ax^{2n} + bx^n + c$.
- Estas instrucciones no dejan transparente cual es el valor agregado de este dominó; las instrucciones sirven en cualquier caso.
- Sería deseable que se plantearan algunos objetivos del juego a nivel del contenido matemático y se ejemplificaran.

Por ejemplo: En las fichas hay binomios de la forma $ax^2 + bx + c$ con $a \neq 0$ y su correspondiente factorización. Se podrá aprovechar el juego para presentar casos numéricos, gráficos y geométricos, no solo simbólicos.

- De manera general hace falta presentar los retos que contienen los diferentes juegos y además utilizar diferentes formas de presentar la información.

4.3. Alcances y Limitaciones de los Recursos Didácticos

A continuación se darán a conocer los alcances y limitaciones del uso de cada uno de los recursos didácticos para el afianzamiento de los métodos de factorización contemplados en esta investigación.

4.3.1. Dominó Algebraico

Alcances

El dominó algebraico contemplado en esta investigación, permite únicamente afianzar el caso de factorización Trinomio Cuadrado Perfecto, ya que las fichas están elaboradas de tal forma que en cada parte haya un término al cuadrado o el desarrollo del cuadrado de un binomio.

Limitaciones

El dominó algebraico presentado no se puede utilizar para afianzar los otros casos de factorización, ya que en esta ocasión está diseñado para fortalecer el caso de factorización Trinomio cuadrado perfecto.

4.3.2. “La Baraja”

Alcances

La baraja es un juego de cartas, en el cual se puede fortalecer la factorización de polinomios con diferente grado (se puede trabajar con polinomios de grado 4,5,6), haciendo uso de los siete casos de factorización empleados en esta investigación.

Limitaciones

La baraja es un recurso didáctico muy completo ya que se puede afianzar los siete casos de factorización, por lo tanto este recurso no presenta limitaciones, dado a que cumple con el objetivo de la investigación.

4.3.3. El Póquer Algebraico

Alcances

El póquer algebraico ayuda a recordar la estructura que tiene cada caso de factorización, dado a que el recurso didáctico consiste en formar o ilustrar con diferentes fichas cada caso de factorización. Por lo tanto, con este recurso didáctico se fortalece los siete casos de factorización.

Limitaciones

En esta ocasión el póquer algebraico no presenta limitaciones, pues ayuda a afianzar los siete casos de factorización empleados en la investigación.

4.3.4. Álgebra Geométrica

Alcances

Mediante el uso de algunas figuras geométricas presentadas en el recurso didáctico, como el cuadrado y rectángulo se pueden fortalecer determinados casos de factorización, como el factor común, factor común por agrupación de términos, trinomio de la forma $x^2 + bx + c$, $ax^2 + bx + c$ y diferencia de cuadrados.

Limitaciones

Este recurso didáctico no se puede emplear para el caso de factorización de suma y diferencia de cubos perfectos, dado a que en el recurso didáctico se utilizan solo figuras geométricas planas.

- Gracias a la elaboración de esta investigación se logró generar un documento útil en el cual se presentaron detalladamente cuatro recursos didácticos como ayuda para afianzar los casos de factorización en estudiantes del grado octavo.
- La recopilación y selección los recursos didácticos tratados en este trabajo de grado nos permitieron establecer que estos son de gran ayuda para los docentes en el aula de clases, dado a que estos cumplen la función de ser un mediador del proceso enseñanza - aprendizaje, lo cual hace más fácil la adquisición de determinados temas por parte de los estudiantes.
- También nos permitieron concebir que la inclusión de los recursos didácticos en el aula, son una herramienta muy potente gracias a que estos nos permiten a todos los docentes a salir un poco de las clases tradicionales y transmitir de una manera más amena las clases en distintas áreas del conocimiento.
- El recorrido histórico referente a los recursos didácticos nos permitió conocer y tener un mayor acercamiento con su entorno y comprender que estos generan en los estudiantes el autoconocimiento y van a la vanguardia debido a que todas las generaciones son cambiantes según el medio; la cultura y la información que hoy en día llega a los estudiantes de una manera mucho más rápida gracias a las nuevas tecnologías.
- Este proyecto de investigación nos dio la oportunidad de acceder a nuevos conocimientos en cuanto a las múltiples formas de enseñanza, desde los puntos de vista de la didáctica de las matemáticas; nos permitió explorar nuevas ideas que son de gran ayuda en el quehacer docente.
- Los recursos didácticos contemplados en este trabajo de grado permiten dar solución a unas de las tantas dificultades que presentan los estudiantes en el aprendizaje de los casos de factorización, por ejemplo, el de memorizar reglas y aplicarlas equivocadamente en casos que no son convenientes.

- La determinación de los alcances y limitaciones de cada uno de los recursos didácticos trabajados en esta investigación nos permitió establecer de manera correcta su funcionalidad correspondiente a cada uno de los casos de factorización.
- Gracias a trabajos de apoyo como esta investigación se logra brindar a los docentes un material de gran utilidad para motivar y facilitar a los estudiantes el aprendizaje del álgebra (casos de factorización) con recursos didácticos apropiados.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] FIDIAS, ARIAS,1999, *El Proyecto De Investigación(Guía para su elaboración)*,CARACAS: DE EPISTEME
- [2] SÁNCHEZ, G, 2015 , *Diseño y Aplicación de una Estrategia Lúdica Para la Enseñanza - Aprendizaje de la Factorización de Polinomios*, TRABAJO DE PROFUNDIZACIÓN PRESENTADO COMO REQUISITO PARA OPTAR AL TÍTULO DE MAGISTER EN ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES, UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA,MANIZALES .
- [3] GIOVANNY , R, 2016 , *El Póquer Como Propuesta Lúdica Para Afianzar EL Conocimiento De Los Primeros 7 Casos DE Factorización*,ESPECIALIZACIÓN EN DOCENCIA UNIVERSITARIA, UNIVERSIDAD LIBRE,BOGOTÁ.
- [4] JIMENES,E ,y, MÁRQUES,P,2009 , *El Juego Como Recurso Didáctico Para Reforzar Los casos De Factorización*,TRABAJO FINAL PARA OPTAR AL TITULO DE LICENCIADO EN MATEMATICAS,UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER,BUCARAMANGA.
- [5] GUZMAN,B ,2013 , *Una Propuesta Para Desarrollar Pensamiento Algebraico Desde La Básica Primaria A Través De La Aritmética Generalizada*,TESIS PARA OPTAR AL TÍTULO DE MAGISTER EN ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES, UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA,BOGOTÁ.
- [6] OCHOA, MYRIAM, LINEAMIENTOS CURRICULARES Y ESTÁNDARES DE MATEMÁTICAS. MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL.
- [7] OSPINA, S, 2014, *Guía didáctica para el aprendizaje de la factorización en estudiantes del CLEI IV del ITM*, TRABAJO FINAL DE MAESTRÍA, UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA,MEDELLIN.
- [8] BOTERO,R, 2014, *Diseño de una estrategia didáctica para la enseñanza de la factorización utilizando geometría, para los cursos básicos de matemáticas en el primer semestre universitario*, TRABAJO FINAL DE MAGISTER EN ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES, UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA,MEDELLIN

-
- [9] MORÁN, G, 2013, *Material Didáctico Para El Fortalecimiento De Los Procesos De Aprendizaje De La Factorización En Grado Octavo Del Colegio San Francisco De La Ciudad De Tuluá*, TRABAJO FINAL DE PREGRADO EN LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS, UNIVERSIDAD CATÓLICA DE MANIZALES, MANIZALES.
- [10] BLANCO, S, 2012, *Recursos didácticos para fortalecer la enseñanza - aprendizaje de la economía*, TRABAJO FIN DE MÁSTER, UNIVERSIDAD DE VALLADOLID, ESPAÑA.
- [11] BERNABE, A, 2012, *Valores Prácticos y Epistémicos de la Factorización de Expresiones Algebraicas En Profesores de Matemáticas*, TRABAJO FINAL DE PREGRADO EN LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS, INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL, MEXICO, D.F.
- [12] BALLÉN, N, 2012, *El álgebra geométrica como recurso didáctico para la factorización de polinomios de segundo grado*, TRABAJO FINAL DE MAGISTER EN ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES, UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA, BOGOTÁ.