



# INTRODUCCIÓN A LA GEOMETRÍA FRACTAL TRABAJO DE GRADO

JORGE ANDRES DUSSAN PASCUAS  
COD 2002100329

Trabajo de grado para optar el título de  
Licenciado en Matemáticas

ASESOR  
LUIS ARTURO POLANIA QUIZA  
Magister en Ciencias Matemáticas

UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA  
FACULTAD DE EDUCACIÓN  
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS  
NEIVA, HUILA

7 de junio de 2010





# Índice general

|   |           |
|---|-----------|
| <b>1. PRESENTACIÓN</b>  | <b>7</b>  |
| <b>2. DESCRIPCIÓN Y FORMULACIÓN DEL PROBLEMA</b>                | <b>9</b>  |
| <b>3. JUSTIFICACIÓN</b>   | <b>11</b> |
| <b>4. OBJETIVOS</b>   | <b>13</b> |
| 4.1. OBJETIVO GENERAL . . . . .                                 | 13        |
| 4.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS . . . . .                            | 13        |
| <b>5. MARCO TEÓRICO</b>   | <b>15</b> |
| 5.1. ASPECTOS HISTÓRICOS DE LA<br>GEOMETRÍA FRACTAL . . . . .   | 15        |
| 5.2. COMO SURGIERON LOS FRACTALES . . . . .                     | 24        |
| 5.3. QUÉ SON LOS FRACTALES . . . . .                            | 27        |
| 5.4. ASPECTOS TEÓRICOS DE LA<br>GEOMETRÍA FRACTAL . . . . .     | 33        |
| 5.4.1. AUTOSIMILITUD . . . . .                                  | 33        |
| 5.4.2. DIMENSIÓN FRACTAL . . . . .                              | 37        |
| 5.5. SISTEMAS DINÁMICOS EN EL PLANO COMPLEJO . . . . .          | 50        |
| 5.5.1. ¿Qué es un Sistema Dinámico en Plano Complejo? . . . . . | 50        |
| 5.5.2. Biomorfos . . . . .                                      | 51        |

|           |   |           |
|-----------|---|-----------|
| 5.5.3.    | El conjunto de Julia . . . . .                              | 51        |
| 5.5.4.    | El conjunto de Mandelbrot . . . . .                         | 55        |
| 5.5.5.    | Interpretación del conjunto de Mandelbrot . . . . .         | 55        |
| 5.6.      | FRACTALES DE CONSTRUCCIÓN<br>GEOMÉTRICA RECURSIVA . . . . . | 60        |
| 5.6.1.    | FRACTAL CONJUNTO TERNARIO DE CANTOR . . . . .               | 61        |
| 5.6.2.    | FRACTAL CURVA DE KOCH . . . . .                             | 63        |
| 5.6.3.    | FRACTAL TRIÁNGULO DE SIERPINSKI . . . . .                   | 68        |
| <b>6.</b> | <b>CONCLUSIÓN</b>   | <b>71</b> |

# Capítulo 1

## PRESENTACIÓN

La incapacidad de la geometría Euclidiana para describir el mundo que nos rodea, empezó a hacerse más notable desde hace poco con la aparición de la *geometría fractal* y es obvio, como dice Mandelbort en *The Fractal Geometry of Nature* que "... Las nubes no son esferas, las montañas no son conos, las costas no son circulares, la corteza de un árbol no es suave y la luz no viaja en línea recta".

Fue Mandelbrot quien concibió esta nueva variante de la matemática, la *geometría fractal*, apropiado para la infinidad de irregularidades que existen en la naturaleza y su estudio en los últimos años la ha convertido en una rama de las matemáticas, íntimamente relacionada con la naturaleza y la computación.

Matias Vallés un periodista del Diario de Mallorca en su entrevista a Benoit Mandelbrot en Julio de 2006 le hizo la siguiente pregunta:

- Quizás los fractales no triunfaron porque fueran más útiles, si no porque fueron mejor explicados? y a la cual Mandelbrot respondió.

**- Soy muy visual, no entiendo las formulas, y quiero que veas el interior de mi cabeza. Como no puedo hacerme un agujero en el cráneo, recurro a las imágenes. Trabajaba en el IBM, diseñamos las máquinas que hicieran realidad mis sueños.**

Los humanos nos vemos en la entera imposibilidad de dibujar una imagen fractal y para hacerlo , necesitamos, básicamente, tres elementos: un ordenador, un software y una dosis relativa de paciencia. Los conocimientos matemáticos no son estrictamente necesarios. Luego mi interés en el tema converge en la importancia del papel que desempeñan las computadoras en el desarrollo de la *geometría fractal*.



## Capítulo 2

# DESCRIPCIÓN Y FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

El conocimiento es una rama muy grande sin embargo no nos damos cuenta de ello, nos limitamos a aprender única y exclusivamente lo que nos concierne en nuestro trabajo diario o a estudiar lo que tenemos que estudiar, por cumplir con un itinerario de obligaciones. Nos quedamos cortos en esto, y la sociedad cada día exige tener un conocimiento integral. Creo que la geometría fractal Tiene que ganarse un espacio en la vida de todos y darle un grado de importancia.

Hasta hoy hemos sido condicionados en nuestro aprendizaje, que los fractales nos parece salido de contexto y muy complicado, nos familiarizamos tanto con la geometría de Euclides, la que nos enseñaron en el colegio y la universidad. ¿Que sucede entonces con los otros modelos matemáticos como la geometría Riemanniana o de Lobachevski? y por que no, la geometría fractal, quien creo merece un escalafón, quizás mucho más grande del que nosotros pensamos.

La geometría fractal a adquirido un desarrollo notable y su importancia radica en que realizan un gran aporte en distintos campos científicos y disciplinas, no sólo en conocimientos concretos, sino como una nueva forma de concebir las cosas y resolver los problemas que se nos plantean, ademas provee dimensiones adicionales y más cercanas a la realidad en comparación con la geometría Euclidiana. Lo sistemas dinámicos pueden ser representados en series de tiempo y sus dimensiones son importantes si se busca estudiarlos y los fractales son escalables, esto es, se puede reducir o ampliar su análisis para observar detalles, mientras que las formas básicas se conservan. Pero algo mucho más interesante que describir con una geometría figuras irregulares es observar su belleza y complejidad en las formas mismas.



# Capítulo 3

## JUSTIFICACIÓN

La idea central de esta experiencia consiste en mostrar a estudiantes y a personas interesadas que no necesariamente estudien o trabajen con el tema pero que en un determinado momento puede lograr muy buenas aplicaciones con los fractales y por que no, por lo menos verse fascinado con las hermosas representaciones gráficas realizadas a computador. Para un artista podría ser una gran fuente de inspiración, mas aun si su estilo es abstracto.

Un estudiante de ingeniería o ingeniero podría verse gravemente afectado, ya que su campo de estudio tiene que ver, fundamentalmente, con procesos matemáticos complejos, que involucran el movimiento de una partícula. Para un programador esta puede ser una importante alternativa para desarrollar nuevos programas compresores, y, por que no, programas para graficar fractales. Para un maestro ésta podría ser una manera bastante interesante de motivar a sus estudiantes. Y también podemos lograr encontrar aprendizajes significativos a partir de la premisa de que las matemáticas están en todas partes, desarrollar habilidades de pensamiento que permitan lograr altos niveles de conceptualización. Y una ama de casa moderna, ¿no estaría interesada en decorar su casa con una de sus imágenes? bueno en fin, son muchas las maneras como le puede interesar a las personas esta novedad matemática ya sea por su aplicación y/o belleza visual.

Además de esto debemos reflexionar que pensar matemáticamente se ha considerado siempre como una acción intelectual de las más fecundas que puede llegar a lograr el ser humano y que aprender a hacer matemáticas o razonar de manera lógico matemática es considerado un signo de ¡verdadera inteligencia!, (es por ello que quien hace matemáticas es mirado y admirado de manera diferente) aún persiste la idea ingenua de que esta es una actividad a la cual no es fácil acceder y por eso debemos concientizar a nuestros estudiantes, del amor que le merece los conocimientos transmitidos por el docente.



# Capítulo 4

## OBJETIVOS

### 4.1. OBJETIVO GENERAL

- Dar una introducción general a la *geometría fractal*, estudiando sus dimensiones desde diferentes autores.

### 4.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Facilitar la comprensión de temas relacionados con la *geometría fractal*.
- Elaborar un trabajo que sirva de motivación al estudio de la *geometría fractal*.
- Incentivar a los docentes y futuros docentes a buscar medios que faciliten el aprendizaje de la matemática.
- Mostrar la importancia que tiene la *geometría fractal* en el desarrollo de las matemáticas.
- Realizar un paralelo entre la *geometría fractal* y las otras geometrías igualmente necesaria en el desarrollo de la ciencia y la tecnología.



# Capítulo 5

## MARCO TEÓRICO

### 5.1. ASPECTOS HISTÓRICOS DE LA GEOMETRÍA FRACTAL

Aunque la aparición de la *geometría fractal* es reciente, sus orígenes se remontan a épocas anteriores durante las cuales muchas personas han aportado su granito de arena en el proceso de construcción de esta teoría. A continuación mostraré algunos de los “hitos” en la historia de las matemáticas no lineales que han labrado el camino hasta lo que hoy conocemos como *geometría fractal*.

#### Karl Theodor Wilhelm Weierstrass

La función de Weierstrass fue la primera conocida con la propiedad particular de ser continua en todo punto y no derivable o diferenciable en ninguno.

Weierstrass mostró que era falsa la conjetura que circulaba en aquella época que afirmaba que las funciones continuas eran diferenciables salvo en puntos aislados.

La función, tal como la definió Weierstrass, es la siguiente:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x)$$

donde  $0 < a < 1$ ,  $b$  es un entero impar y positivo tales que

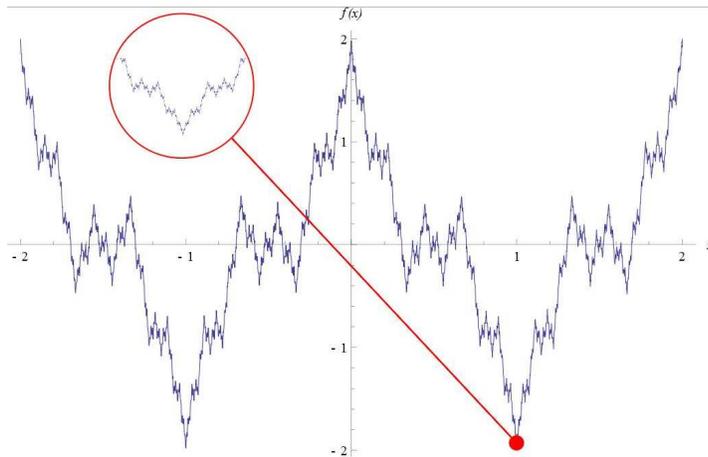
$$ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$$

Para nuestro propósito, veremos que una de sus propiedades más interesante es su



Figura 5.1: Weierstrass (1815-1897)

condición fractal. Si bien su gráfico no es rigurosamente autosemejante, la dimensión (tema que se tratara más adelante) del mismo gráfico no es uno ni dos.

Figura 5.2: Función de Weierstrass en el intervalo  $[-2, 2]$ 

## Teiji Takagi

La *función de Takagi*, llamada así en honor a Teiji Takagi (1875-1960), matemático Japonés quien dió un ejemplo de función continua no derivable en ningún punto, más sencillo que el de Weierstrass. Su construcción es muy semejante, pero sustituye el coseno por la función *tienda de campaña*. En  $[0, 1]$  se define como:

$$T(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 2 - 2x & \text{si } \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$$



Figura 5.3: Takagi (1875-1960)

extendiéndose por periodicidad a todo  $\mathbb{R}$  la función de Takagi se define entonces como

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T(2^n x)}{2^n}$$

Como  $T$  es acotada, la serie converge uniformemente y por lo tanto  $\varphi$  es continua. Una demostración de que no tiene derivada en ningún punto, se encuentra en el cálculo de M. Spivak[5].

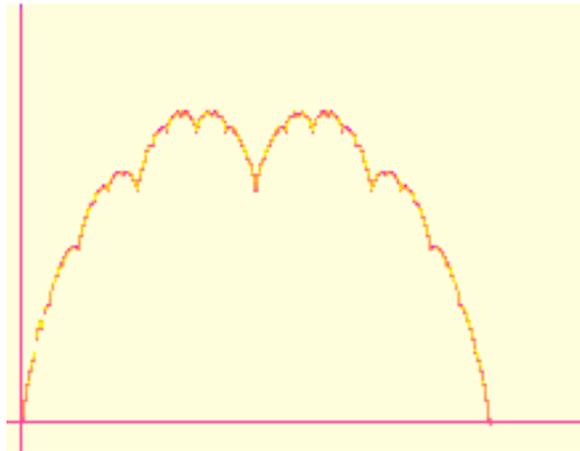


Figura 5.4: Función de Takagi

## Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor



Figura 5.5: Cantor (1845-1918)

Conocido como el creador de la TEORIA CONJUNTISTA y por su descubrimiento de los números transfinitos. Fue el primero en probar la no numerabilidad de los números reales, e hizo contribuciones significantes a la teoría de la dimensión. Estableció una sucesión de segmentos conocida como "polvo de Cantor".



Figura 5.6: Polvo de Cantor.

## Aleksandre Mikhailovich Lyapunov

Trabajó en el campo de ecuaciones diferenciales, teoría potencial, estabilidad de sistemas y teoría de las probabilidades. Sus preocupaciones principales eran la estabilidad de equilibrios y del movimiento de sistemas mecánicos, la teoría modelo para la estabilidad del líquido turbulento uniforme, y partículas bajo la influencia de la gravedad, preocupaciones que abrieron el camino para el estudio de sistemas dinámicos.

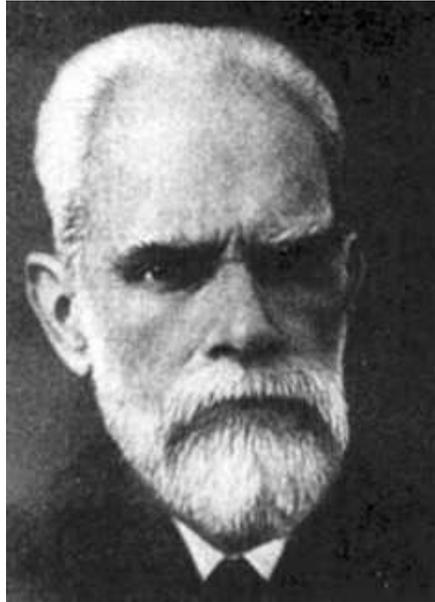


Figura 5.7: Lyapunov (1857-1918)

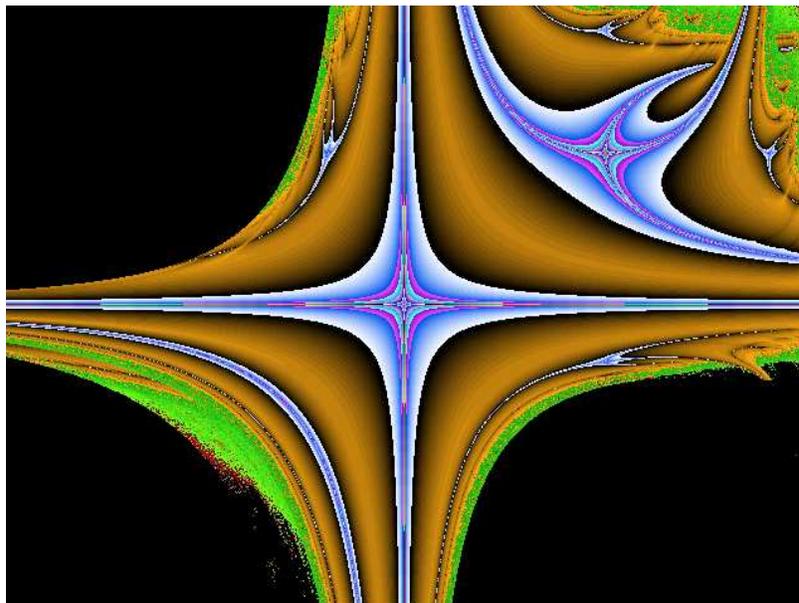


Figura 5.8: Espacio Lyapunov

## Giuseppe Peano



Figura 5.9: Peano(1858-1932)

Peano fue el fundador de la lógica simbólica y sus intereses se centraron en los fundamentos de las matemáticas y en el desarrollo de un lenguaje lógico formal. Diseñó una curva que, en su límite, recubre todo el plano. Al cambiar la dimensión en su límite se sitúa en el contexto de la *geometría fractal*.

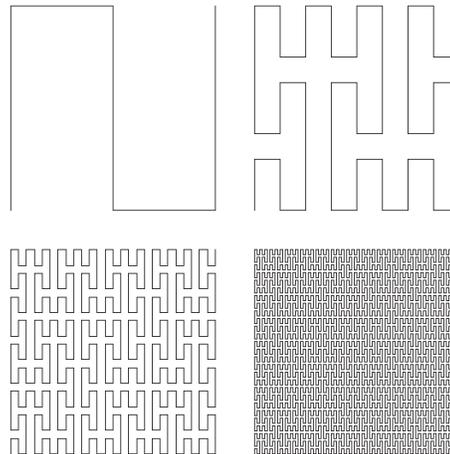


Figura 5.10: Curva de Peano

## Waclaw Sierpinski

El trabajo más importante de Sierpinski es en el ámbito de la teoría de conjuntos, punto de ajuste de la topología y la teoría de números. En la teoría de conjuntos hizo importantes contribuciones al axioma de elección y la hipótesis del continuo.



Figura 5.11: Sierpinski(1882-1969)

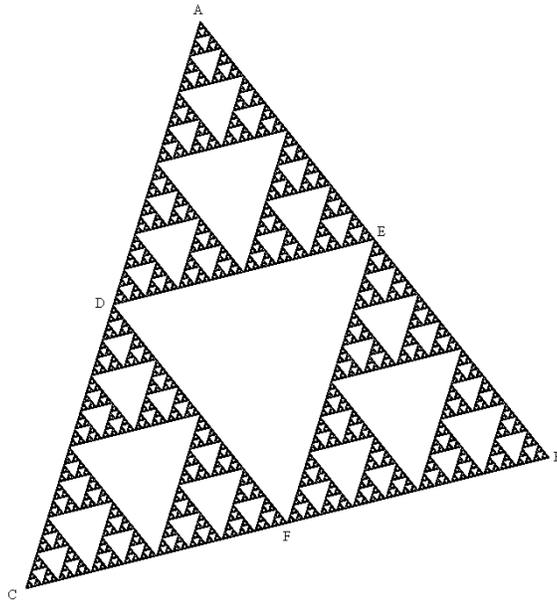


Figura 5.12: Triángulo de Sierpinski.

## Niels Fabian Helge von Köch



Figura 5.13: Koch 1815-1897)

Otra estructura matemática ya conocida en esa época y que más tarde pasó a formar parte de uno de los fractales más reconocidos es el de Koch “Snowflake” Curve, o la curva de “Copo de nieve” de Helge von Koch su aporte más famoso.

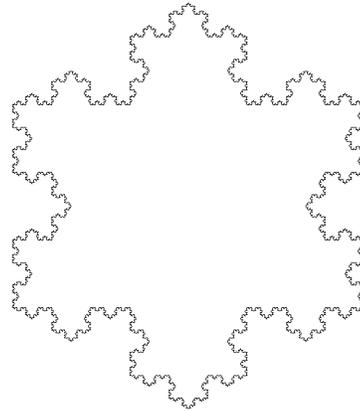


Figura 5.14: Copo de Nieve

## Gaston Maurice Julia

Julia fue un precursor en lo que hoy se conoce como fractales. Fue el primero en estudiar el tema, y explicar cómo a partir de cualquier función compleja se puede fabricar, por medio de una sucesión definida por inducción, un conjunto cuya frontera es imposible de dibujar a pulso (por ser de longitud infinita, entre otras propiedades).



Figura 5.15: Julia(1893-1978)

Sin embargo, en su vida no tuvo mucha fama. En efecto, murió antes que se volvieran muy populares los fractales, a inicios de los años ochenta.

Gaston Julia no tuvo mucha suerte en su vida privada, pues tuvo que interrumpir sus prometedores estudios a los 20 años a causa de la Primera Guerra Mundial, donde perdió su nariz. Numerosas operaciones de cirugía no pudieron recomponerla, y tuvo que llevar una pequeña máscara el resto de su vida.

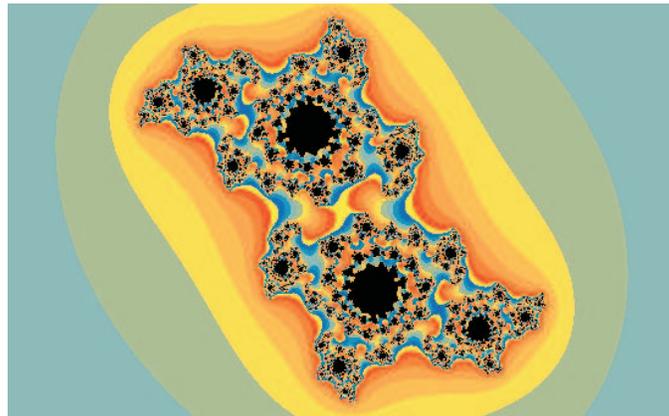


Figura 5.16: Conjunto de Julia

Hasta el momento se ha visto de manera general como los sistemas dinámicos y caóticos se fueron introduciendo en el pensamiento de la comunidad científica y como fueron surgiendo nuevas necesidades para reformular teorías y crear nuevas herramientas que pudieran describir sistemas que hasta ese entonces eran considerados

excepciones y a los cuales se les realizaban diferentes aproximaciones y se les aplicaban diversos “trucos” matemáticos para ajustarlos a las herramientas disponibles en esos tiempos. Posteriormente, veremos algunos problemas que surgen de utilizar técnicas de aproximación en los que se omite detalles y variables que con el transcurso del tiempo se pueden convertir en monstruos caóticos e impredecibles.

## 5.2. COMO SURGIERON LOS FRACTALES

### Benoit Mandelbrot



Figura 5.17: Mandelbrot (1924- )

Nació el 20 de noviembre de 1924 en Varsovia, Polonia dentro de una familia judía culta de origen lituano. Fue introducido al mundo de las matemáticas desde pequeño gracias a sus dos tíos. Cuando su familia emigra a Francia en 1936 su tío Szolem Mandelbrot, profesor de matemáticas en el Collège de France y sucesor de Hadamardost en este puesto, toma responsabilidad de su educación. Después de realizar sus estudios en la Universidad de Lyon ingresó a la “École Polytechnique”, a temprana edad, en 1944 bajo la dirección de Paul Lévy quien también lo influyó fuertemente. Se doctoró en matemáticas por la Universidad de París en el año 1952.

En 1967 publicó en *Science* ¿Cuánto mide la costa de Gran Bretaña?, donde se exponen sus ideas tempranas sobre los fractales.

Fue profesor de economía en la Universidad Harvard, ingeniería en Yale, fisiología en el Colegio Albert Einstein de Medicina, y matemáticas en París y Ginebra. Desde 1958

trabajó en IBM en el Centro de Investigaciones Thomas B. Watson en Nueva York <sup>1</sup>.

Benoit Mandelbrot ya integrado a los laboratorios de la IBM comienza una investigación acerca del análisis del ruido y las perturbaciones eléctricas <sup>2</sup>. Mientras realizaba dichos estudios encontró un patrón en su comportamiento y por lo tanto comenzó a descifrar una estructura escondida, denominada “jerarquías de fluctuaciones en todas las escalas” que es algo como variaciones no periódicas o series de cambios aleatorios.

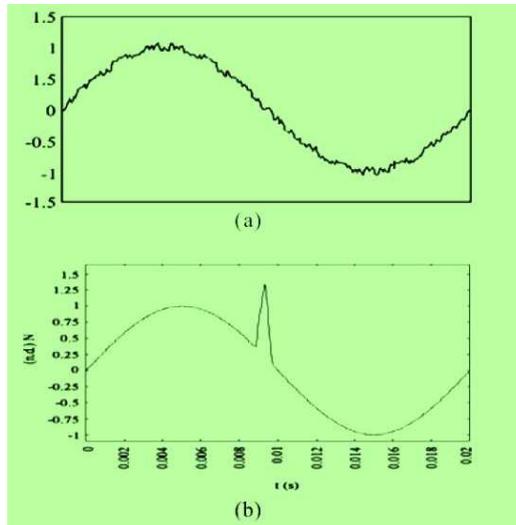


Figura 5.18: (a) Ruido eléctrico presente en la señal senoidal proporcionada por la red eléctrica, (b) Perturbación o Impulso eléctrico[16].

Lo que sí es cierto es que esas fluctuaciones no podían ser descritas por la matemática estadística que existía. Mientras seguía adelante con sus tareas empezó a imaginar en que otros sistemas podría encontrar patrones similares que no puedan ser descritos con exactitud por la matemática existente y que se comportaran de igual manera. Su visión lo llevó a hacerse una pregunta que para la mayoría de nosotros puede resultar obvia y hasta para muchos otros ser trivial, o en el mejor de los casos sin sentido. Su famosa pregunta fue: Cuánto mide realmente la costa de Inglaterra? para cualquiera que tome un libro de geografía o un mapa va a poder contestar esto sin ningún tipo de problema. Pues bien, según los libros mide  $5,290Km$  Ahora bien, esos  $5,290Km$ , de dónde provienen? Cómo se midieron? Para contestar esto Mandelbrot propone tres situaciones diferentes, con distintos puntos de vista:

<sup>1</sup>Biografía tomada de la wikipedia <http://es.wikipedia.org>

<sup>2</sup>Los ruidos eléctricos se producen debido al funcionamiento de máquinas eléctricas con escobillas, soldadoras de arco, timbres, interruptores, etc.

1. Observación y medición de la costa desde un satélite.
2. Observación y medición de la costa desde un helicóptero.
3. Observación y medición de la costa desde la superficie terrestre.

En el primer caso la costa de Inglaterra se verá mas suave, con líneas rectas y ángulos casi redondeados; en el segundo, por encontrarnos más cerca de la costa veremos que los bordes ya no son tan suaves, notaremos más rugosidades y en el tercer caso, en el que nos encontramos parados sobre la misma costa, notaremos muchos más detalles, cabos y bahías que antes no notábamos desde el satélite, ni desde el helicóptero. ¿Cómo será el resultado de las distintas mediciones? ¿Siempre habrá arrojado el mismo resultado? Si este resultado varió, ¿cuál habrá sido el de mayor longitud?

La realidad y la geometría tradicional nos muestra que una figura con bordes rectos o redondeados tiene una longitud menor que otra equivalente pero llena de rugosidades, es decir, una longitud sin rugosidad es menos extensa que una totalmente irregular, entonces podemos asegurar que los resultados de las 3 mediciones serán diferentes, y el de mayor extensión será el tercer caso, ya que es en el cual vemos más detalles que las dos primeras observaciones.

Ahora supongamos que ampliamos el lugar del observador hasta el infinito, ¿Cuál sería el resultado de la medición en cada caso?, bueno en realidad el resultado de este último caso se acercaría a infinito en el marco teórico.

Lo anterior sugiere una observación, ¿de qué dependerán nuestras mediciones, entonces?. Justamente de la escala que utilicemos para medirlas, y no es para nada una casualidad que estas deducciones se desprendan de los mismos patrones que encontró Mandelbrot en sus estudios de ruidos y perturbaciones eléctricas, recordemos: “jerarquías de fluctuaciones en todas las escalas”. Esas escalas como Mandelbrot reconoció poseían un patrón, y ese patrón las relacionaba diciendo que si bien no eran iguales a diferentes escalas, si lo eran de manera *estadísticamente similar*, y ésta es una de las características principales de los fractales, característica que estudiaremos más adelante.

Es con estos estudios que Mandelbrot se convierte en el gran impulsor de la matemática fractal ayudado, por supuesto, de las computadoras. Todas las propiedades de los fractales que estableció Julia a fuerza de cálculos y deducciones, con papel y lápiz, las podían observar en su pantalla Mandelbrot y los millones de propietarios de ordenadores personales con modo gráfico. Mandelbrot acuñó el nombre de fractal<sup>3</sup> y a él se le atribuye también el nombre de *geometría fractal*

---

<sup>3</sup>El término fue propuesto por BENOIT MANDELBROT en 1975 y deriva del Latín *fractus*, que significa quebrado o fracturado

## 5.3. QUÉ SON LOS FRACTALES

Se afirma que es complicado dar una definición general de *fractales* porque muchas de estas definiciones no se pueden aplicar a todas las familias de fractales existentes. Sin embargo, todos los fractales tienen algo en común, ya que todos ellos son el producto de la iteración, repetición, de un proceso geométrico elemental que da lugar a una estructura final de una complicación aparente extraordinaria. Es decir, que cada porción del objeto tiene la información necesaria para reproducirlo todo, y la dimensión fractal no es necesariamente entera.

Buscando en la web y en libros sobre *geometría fractal* surgen diferentes enunciados sobre fractales. Parece que se requiere tal nivel de abstracción para comprender el concepto de fractal que los puntos de vista varían así se este hablando de los mismo; es más, el mismo Mandelbrot no esta completamente conforme con su definición de fractales. Además, de acuerdo con la importancia que se ha ganado la *geometría fractal* en diferentes disciplinas, cada uno tiene su propio punto de vista en relación con su aplicación.

Para tratar de dar una definición más acertada mencionaré un conjunto de definiciones multidisciplinarias, que nos puede arrojar en una definición más general.

1. Los Fractales son los objetos matemáticos que conforman la Geometría de la Teoría del Caos.
2. La Geometría Fractal es también conocida como la *Geometría de la Naturaleza*.
3. La palabra Fractal, enunciada por Mandelbrot, proviene del latín FRACTUS y significa roto, quebrado.
4. La Geometría Fractal es un nuevo lenguaje; ya que los puntos, rectas, esferas, elipses y demás objetos de la geometría tradicional son reemplazados por algoritmos iterativos computacionales que permiten describir sistemas naturales, caóticos y dinámicos.
5. Los Fractales son objetos cuya dimensión es no entera o fraccionaria.
6. Un objeto fractal es aquél que su dimensión fractal de Hausdorff -Besicovich supera a su dimensión topológica.
7. Un objeto fractal es aquél que posee las siguientes dos características:
  - a) Autosimilitud,
  - b) Dimensión Fractal
8. Un fractal es un objeto en el cual sus partes tienen “alguna” relación con el todo. (esto está íntimamente ligado a la Autosimilitud)

Cualquiera de estas ocho definiciones es considerada correcta. Se afirma que algunas son más completas, otras más técnicas y otras aportan tan solo meras características; pero se dice que no llegan a ser definiciones con el rigor que se requiere.

Analícemos algunas de ellas. En la primera estamos de acuerdo en que cada teoría o ley matemática posee sus propias herramientas que la soportan y la describen. Se me ocurre, por ejemplo, que algunos fractales creados por el hombre se soportan en el plano complejo pues se requiere de iterarlos bajo una fórmula. Las más comunes son la geometría euclidiana, el álgebra, o el mismo cálculo, este último en especial se da en la Física. La teoría del Caos no es la excepción a la regla, y se sustenta, entre otras cosas, sobre la Geometría Fractal.

La segunda definición nos dice que a la Geometría Fractal se la conoce como la “Geometría de la Naturaleza”, que es más o menos lo que nos quiere explicar Mandelbrot con su más importante libro “geometría fractal de la naturaleza”. Este libro nos hace reflexionar sobre lo corto que se queda la geometría tradicional en describir las cosas que nos rodean, que en su mayoría son rugosas. Para evidenciar un poco más esto quiero mostrar una entrevista a Mandelbrot realizada por Eduardo Punset, un famoso escritor y divulgador científico de España.

- Mandelbrot: Imaginemos a un hombre o mujer primitivos. ¿Cuántas formas suaves veían? Muy pocas: la luna llena, el ojo, la pupila, el iris, algunos alimentos esféricos. Pero muy, muy pocas formas eran así. Todo lo demás era rugoso. ¿Y qué hicieron las matemáticas? Empezaron por las formas simples y desarrollaron una geometría y posteriormente una ciencia detallada. ¿Y qué pasó con las rugosidades? Pues que quedaron en manos de los artistas.
- Punset: Cierto ...



Figura 5.19: El monte Fuji, una forma clásica al fondo de las olas fractales de Hokusai

- M: Algunos artistas tenían una fuerte sensibilidad hacia lo rugoso y fragmentado, pero al principio yo no lo sabía, ¡nadie lo sabía! solamente después de desarrollar la geometría fractal se me ocurrió que Hokusai, el genial pintor japonés del período Edo<sup>4</sup>, tenía una visión extremadamente geométrica. En sus dibujos, siempre aparece alguna forma clásica (el monte Fuji, que es muy suave y casi un cono) varias cosas simples, y todo lo demás es muy abrupto. Sin saberlo, simplemente por motivos estéticos, Hokusai pintaba fractales. Al contemplar la sombra de una nube que se cierne sobre el monte Fuji en uno de esos cuadros es sorprendente ver el grado de precisión que logra el artista, son nubes sobre nubes, sobre nubes, es muy difícil pintar una nube pero el lo hizo, lo mismo con los árboles. Delacroix, también no era consciente de la fractalidad, sin embargo, lo plasmaba en sus cuadros. Una vez, cuando aconsejaba a un joven pintor que le había preguntado cómo se dibujaba un árbol, Delacroix dijo: “un árbol se compone de árboles pequeños”.

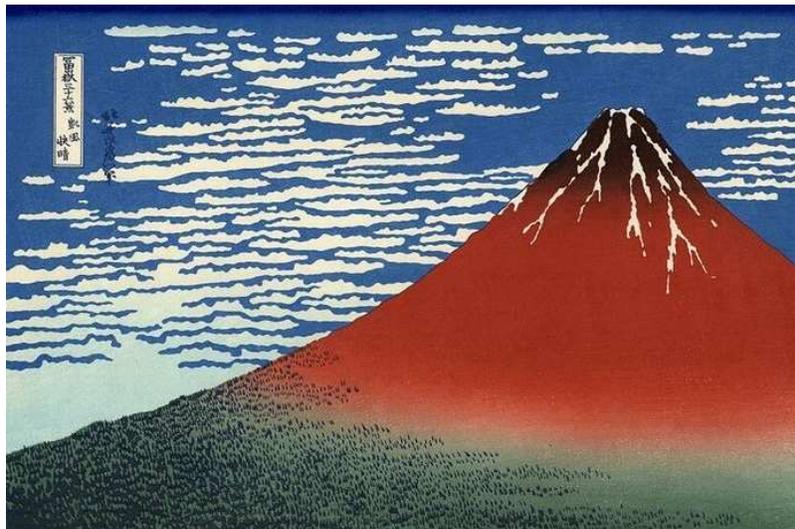


Figura 5.20: El monte Fuji.

- P: De árboles pequeños?...
- M: Además, si analizamos el arte de cualquier civilización, encontraremos muchos aspectos fractales, incluso en el arte de civilizaciones sin escritura. Me parece que la fractalidad ha sido algo extremadamente natural y que no se puede hablar del “padre de los fractales” porque todo eso sucedió hace tiempo. Yo me considero, quizá, el padre de la geometría fractal, porque fui el que descubrió que las mismas estructuras que los artistas y, a veces, los filósofos habían utilizado durante milenios de un modo inconsciente podían convertirse en herramientas para la

---

<sup>4</sup>El Período Edo fue una época de la historia de Japón que abarca desde 1600 hasta 1868, en la que gobernó la dinastía Tokugawa y que recibió este nombre en honor de la ciudad de Edo (Tokio en la actualidad).

comprensión de la ciencia. Y también en herramientas para disfrutar, porque los dibujos de fractales son hermosos.

- P: Usted ha dicho que el brócoli es el fractal más emblemático. ¿Por qué?
- M: Se trata de un caso que comprendemos bien porque la naturaleza es económica. Sería muy difícil imaginar que la naturaleza incluyera en el ADN distintos códigos para cada rama de un brócoli. En el momento en el que tenemos un sistema con ramas, el ADN ordena crear una rama, una nueva rama y luego, tras un cierto número de fases, se detiene. Lo mismo sucede con el pulmón humano. Incluye ramificaciones, más ramificaciones, muchas veces y luego el código dice: “ahora toca parar y hacerlo diferente” durante unas cuantas fases. Así que no solamente el exterior, con objetos como el brócoli, sino también el interior de nuestro cuerpo están repletos de fractales. Y es una perspectiva muy útil, porque mis colegas que se especializan en anatomía cooperan con los físicos y han desarrollado conjuntamente una visión del pulmón que explica muchos problemas pulmonares de una manera que supone una promesa de progreso en el futuro.

Esta entrevista a Mandelbrot, nos da una idea clara acerca de lo que él quería plasmar en su libro *Geometría Fractal de la Naturaleza*. Existen otros ejemplos claros de fractales en el mundo vegetal, además de los dichos por Mandelbrot, tales como los helechos, la espiga de sorgo, el coliflor, pues se puede apreciar claramente su autosimilitud como característica fundamental de los fractales. Estas partes pueden ser divididas hasta donde sea posible físicamente conservando cierta similitud.



Figura 5.21: Fractales Naturales

## FRACTALES EN EL CUERPO HUMANO

Es necesario examinar con detenimiento nuestro cuerpo para percibir la variedad de sistemas autosimilares tales como los pulmones, el sistema nervioso, el sistema circulatorio. Este último posee diferentes tipos de vasos sanguíneos que luego se ramifican en capilares que son más finos, este sistema ramificado proviene del corazón y debe estar dispuesto de tal modo que ningún tejido del cuerpo este carente de venas y arterias. Su estructura fractal ramificada permite que el flujo sanguíneo se bifurque antes de llegar para mantener un volumen sanguíneo total bajo y pueda suministrar a cada órgano del cuerpo sus nutrientes.

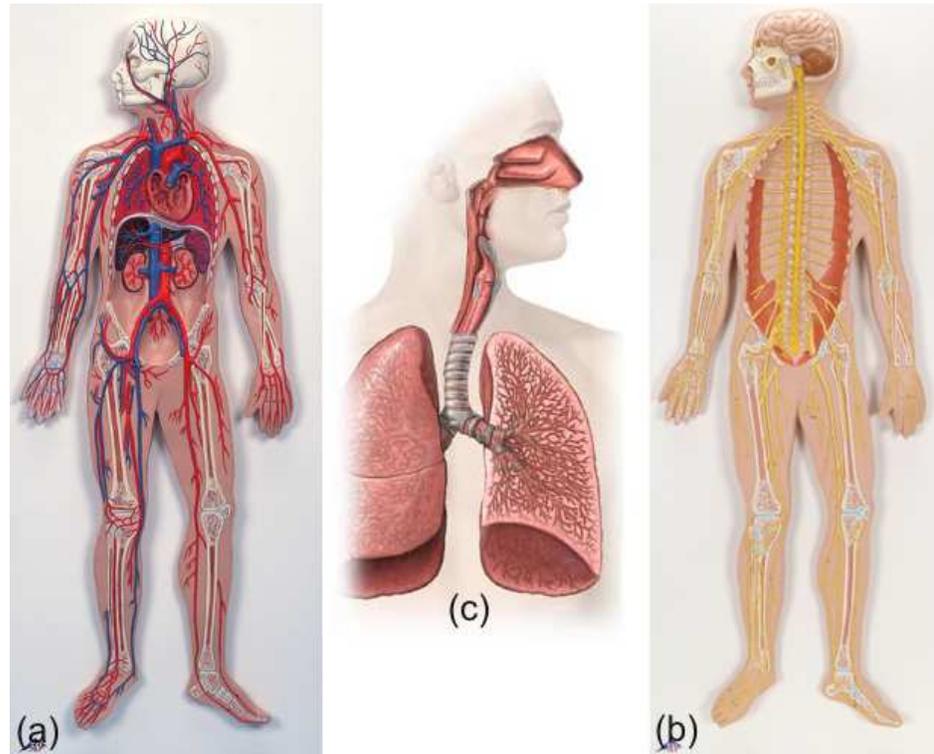


Figura 5.22: (a) Sistema circulatorio, (b) Sistema Nervioso, (c) Sistema Respiratorio

El sistema Nervioso inspecciona la actividad de los otros órganos corporales, consta del sistema nervioso central y el sistema nervioso periférico que se ramifica a partir de la médula espinal y se inserta en los órganos y tejidos.

También están los pulmones que según estudios realizados por Bruce West y Ary Goldberg han demostrado que este incorpora una variedad de escalas fractales, con el fin de otorgar mayor eficiencia.

Con esta visión general sobre los fractales naturales es que se nos empieza a poner turbia nuestra percepción de las cosas que normalmente nos rodea pues, a partir de ello, podemos encontrar figuras fractales por doquier. Si miramos el quinto enunciado en

donde se presenta una de las principales características de los fractales, su dimensión, que es no entera o fraccionaria. Sobre este aspecto trataremos más adelante ya que hace parte principal de la presente monografía.

## 5.4. ASPECTOS TEÓRICOS DE LA GEOMETRÍA FRACTAL

Ahora bien, nos concentraremos en la definición del numeral 7, en la cual encaja la esencia de este trabajo. Esta dice: **Un objeto fractal es aquél que posee las siguientes dos características:**

1. Autosimilitud,
2. Dimensión Fractal

### 5.4.1. AUTOSIMILITUD

Cada porción de un objeto tiene las mismas características del objeto completo. Cuando se consideran fractales naturales como un árbol, esto quiere decir que el aspecto es el mismo independientemente de la escala en que lo observemos: el tronco se divide en ramas, que a su vez se divide en ramas más pequeñas, de las que salen hojas, que tienen nervaduras, a su vez se subdividen, etc. Mirando una rama tenemos la misma impresión que mirando todo el árbol o una hoja.

Existen dos tipos de autosimilitudes:

#### **Autosimilitud perfecta**

Cada porción de un objeto tiene exactamente las mismas características del objeto completo. Autosimilitud tan perfecta que sería imposible distinguir una instantánea de un fractal a escala 1 que otra hecha a escala 200, simplemente por la autorrecurrencia que muestran los objetos fractales, por su simetría dentro de una escala, por su pauta en el interior de una pauta. Los objetos fractales están formados por copias más o menos exactas de partes de sí mismos. Dentro de este tipo de fractales se encuentra el conjunto ternario de Cantor, el copo de nieve, curva de Peano, el triángulo de Sierpinski, entre otros.

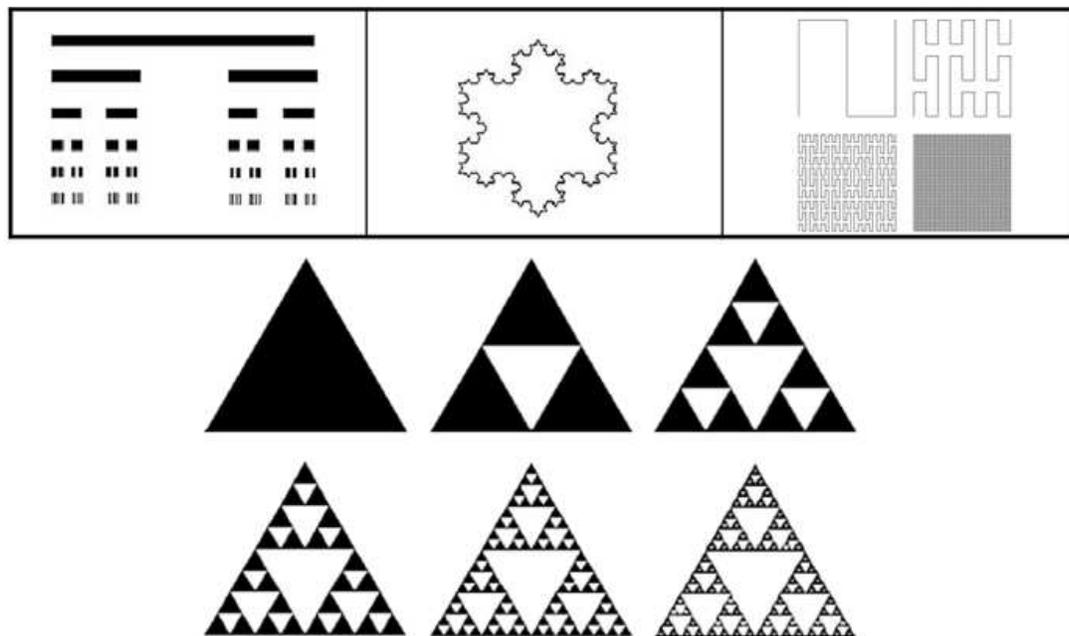


Figura 5.23: Ejemplos de similitud perfecta

### Cuasiautosimilitud

Este exige que el fractal parezca aproximadamente idéntico a diferentes escalas. Los fractales de este tipo contienen copias menores y distorsionadas de sí mismos. Matemáticamente D.Sullivan definió el concepto de conjunto cuasiauto-similar a partir del concepto de cuasi-isometría. Los fractales definidos por relaciones de recurrencia son normalmente de este tipo <sup>5</sup>.

Pero veamos un ejemplo gráfico, con el conjunto de Mandelbrot, el fractal más conocido.

La primera de las cuatro imágenes es el conjunto de Mandelbrot en su estado original, o sea, sin ninguna iteración, o para que se entienda mejor, sin haber hecho ningún ZOOM dentro de la imagen. Las siguientes figuras se generan ampliando un sector del fractal y viendo que se encuentra dentro. Nótese que se está hablando de un ZOOM inicial en un área determinada; si se hubiese elegido otro lugar de fractal donde comenzar a interactuar, hubiese generado imágenes distintas, pero al mismo tiempo preservan su cuasiautosimilitud sin importar la porción del fractal designado.

Es importante notar, que no se usa la palabra ZOOM con el significado de ampliación de la imagen sino, solo, para dar una idea figurativa. Lo que realmente se hace con un software para generar fractales son iteraciones. Pero, básicamente, cada vez que se elige un trozo de imagen para ampliar dentro de ellas se encuentran infinitas imágenes

<sup>5</sup>Extraído de la wikipedia <http://es.wikipedia.org/wiki/Fractal>

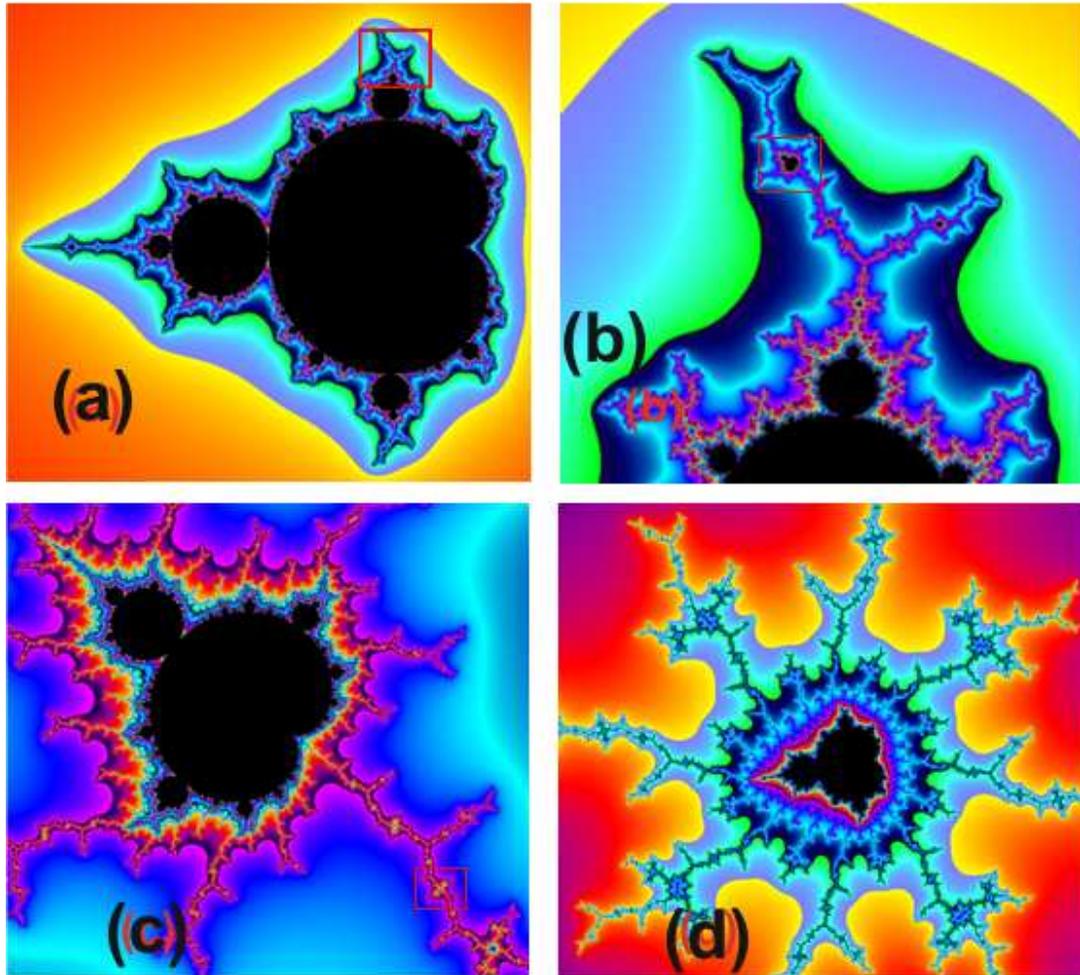


Figura 5.24: Conjunto de Mandelbrot a diferentes escalas, (a)Mandelbrot a escala 1, (b)Zoom del recuadro de (a), (c)Zoom del recuadro de (b), (d) Zoom del recuadro de (c).

cuasisimilares.

Otro ejemplo de ello es el *Atractor de Lorenz*, creado por el físico y matemático holandés Edward Lorenz, que es un sistema dinámico determinístico tridimensional no lineal derivado de las ecuaciones simplificadas de rolos de convección que se producen en las ecuaciones dinámicas de la atmósfera terrestre, éste modela el clima meteorológico.

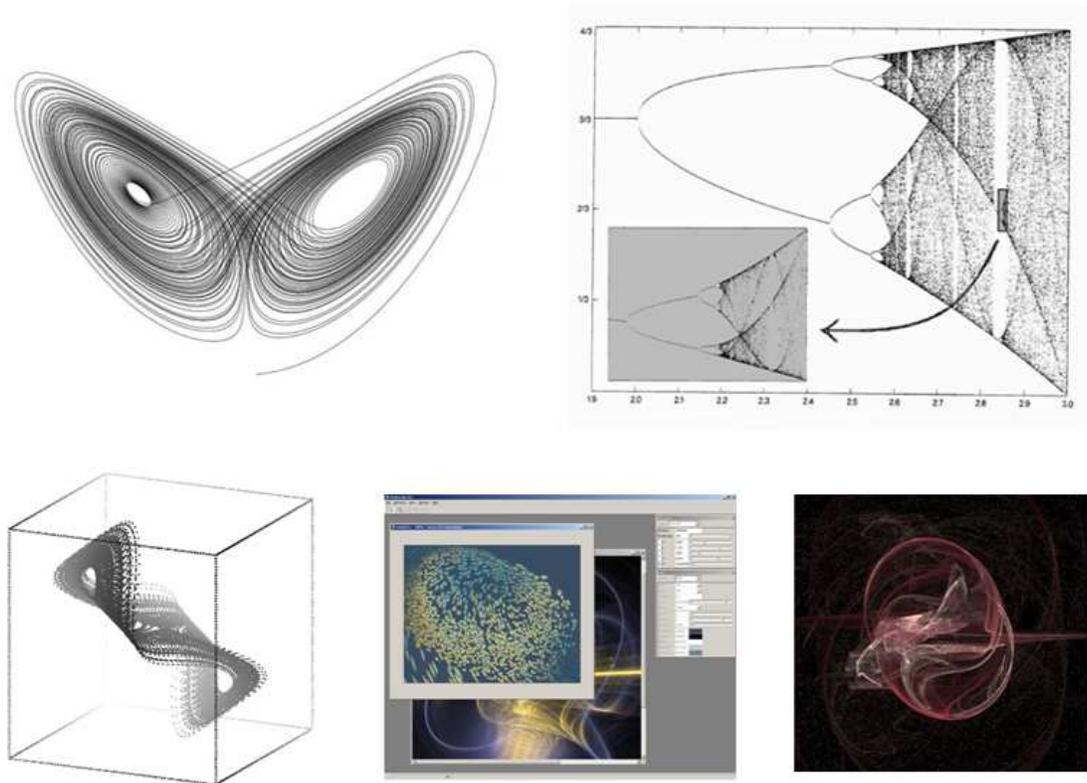


Figura 5.25: Fractales caóticos - Atractores extraños [9]. El primero es el Atractor de Lorenz.

### Autosimilitud estadística

Cada región de un objeto conserva, de manera estadísticamente similar, sus características globales. Es el tipo más débil de autosimilitud: se exige que el fractal tenga medidas numéricas o estadísticas que se preserven con el cambio de escala. Los fractales aleatorios son ejemplos de fractales de este tipo y el movimiento browniano es uno de ellos, este movimiento aleatorio que se observa en algunas partículas microscópicas que se hallan en un medio fluido (por ejemplo polen en una gota de agua). Recibe su nombre en honor al escocés Robert Brown, biólogo y botánico que descubrió en 1827 este fenómeno. Él observó que pequeñas partículas de polen se

desplazaban en movimientos aleatorios sin razón aparente. En 1785, el mismo fenómeno había sido descrito por Jan Ingenhousz sobre partículas de carbón en alcohol.

El movimiento aleatorio de estas partículas se debe a que su superficie es bombardeada incesantemente por las moléculas (átomos) del fluido sometidas a una agitación térmica. Sustentando así la teoría de Einstein sobre la existencia de los átomos.

Este bombardeo a escala atómica no es siempre completamente uniforme y sufre variaciones estadísticas importantes. Así la presión ejercida sobre los lados puede variar ligeramente con el tiempo provocando el movimiento observado <sup>6</sup>

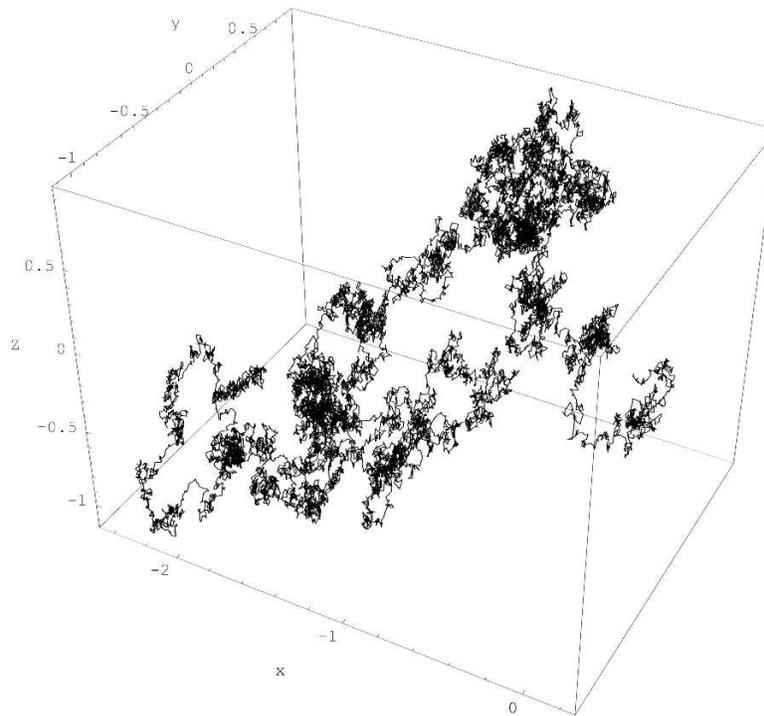


Figura 5.26: Movimiento browniano en tres dimensiones [12].

### 5.4.2. DIMENSIÓN FRACTAL

La medición de las formas fractales (fronteras, copos, litorales, etc.) han obligado a introducir conceptos nuevos que van más allá de los conceptos geométricos clásicos. La longitud de la línea fractal depende de la longitud del instrumento o la unidad patrón de medida que se tome. Ya que si se toma una longitud  $\varepsilon$  como patrón de medida y se traslada a lo largo de un litoral, la longitud aproximada de este litoral ( $L$ ) estaría

---

<sup>6</sup>Tomado de la wikipedia <http://es.wikipedia.org>

determinado por el número de comparaciones ( $N$ ) multiplicado por la longitud del patrón  $\varepsilon$ .  $L = N\varepsilon$

Pero al repetirse el mismo procedimiento disminuyendo la unidad de patrón, vemos que la longitud a medir se hace cada vez más grande y no es acotada por lo que, en últimas, carece de sentido hablar de longitud. Por ello existe otro concepto que es el de *dimensión fraccional*.

### Dimensión Topológica

La noción de dimensión fractal (fraccional) provee una manera de medir qué tan rugosa es una curva. Normalmente consideramos que los puntos tienen dimensión 0, las líneas 1, las superficies 2 y los volúmenes 3. A esta idea de dimensión se lo llama dimensión topológica.

|           |   |            |
|-----------|---|------------|
| Dimensión | 0 | Un punto   |
| Dimensión | 1 | Una recta  |
| Dimensión | 2 | El plano   |
| Dimensión | 3 | El espacio |

Otra definición de la dimensión topológica, es la definición de acuerdo al movimiento: en una recta solo podemos movernos en una sola dirección, en una superficie solo en dos direcciones y en un espacio en tres direcciones (adelante y atrás, izquierda y derecha, arriba y abajo).

### Dimensión de Hausdorff-Besicovitch

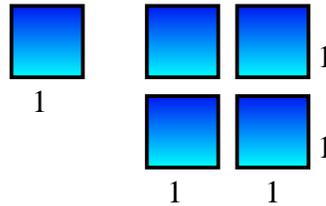
Una curva rugosa que recorre una superficie puede ser tan rugosa que casi llene la superficie en la que se encuentra. Superficies como el follaje de un árbol o el interior de un pulmón pueden efectivamente ser tridimensionales. Podemos, entonces, pensar de la rugosidad como un incremento en la dimensión: una curva rugosa tiene una dimensión entre 1 y 2, y una superficie rugosa la tiene entre 2 y 3.

Para calcular la dimensión de un fractal se usan los conceptos de límite, logaritmo, escalas y medidas. En el cálculo de la dimensión de fractales muy complejos como el conjunto Mandelbrot se usan computadoras, pero para fractales más simples se usan fórmulas matemáticas, una muy común es la de Hausdorff-Besicovitch, pero hay varios métodos. Damos aquí un ejemplo simple: el cálculo de la dimensión del triángulo de Sierpinski, utilizando un método llamado *similitud por duplicación*.

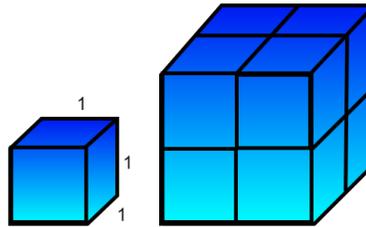
Si tomamos un segmento de longitud 1 y lo duplicamos tendremos dos segmentos iguales al original.



Si duplicamos los lados de un cuadrado de lado 1 tendremos 4 cuadrados iguales al original.



Tomamos ahora un cubo de largo, alto y ancho 1 y duplicamos todas sus medidas, tenemos ahora 8 cubos iguales al original.



Ahora registremos la información anterior en una tabla:

| FIGURA     | DIMENSIÓN | NÚMERO DE COPIAS |
|------------|-----------|------------------|
| Línea      | 1         | $2 = 2^1$        |
| Cuadrado   | 2         | $4 = 2^2$        |
| Cubo       | 3         | $8 = 2^3$        |
| ⋮          | ⋮         | ⋮                |
| En general | $D$       | $N = 2^D$        |

Es de notar que al duplicar los lados de una figura, el número de figuras iguales a la original es 2 elevado a un número igual a la dimensión de la figura.

Sea  $N$  el número de figuras iguales a la original, es decir, las copias, y sea  $D$  la dimensión de la figura. La relación está dada por:

$$N = 2^D$$

De acuerdo con la definición de logaritmo, se obtiene:

$$\log N = D \log 2$$

Luego,

$$D = \frac{\log N}{\log 2}$$

Se puede usar esta expresión para encontrar la dimensión fractal del triángulo de Sierpinski puesto que al duplicar la longitud de los lados, se obtiene otro triángulo de Sierpinski semejante al primero, que contiene a su vez a 3 triángulos de la misma escala que el primero; por lo tanto,  $N = 3$ .

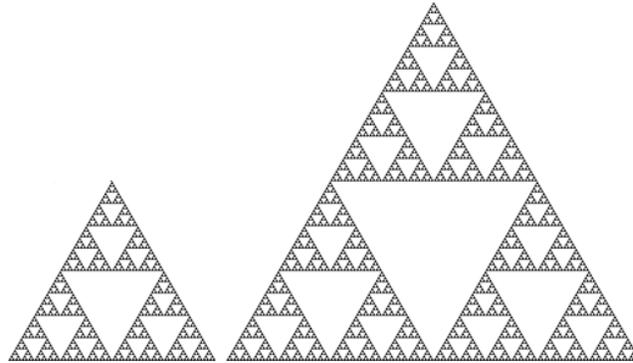


Figura 5.27: Duplicando la longitud de sus lados obtenemos otros nuevos tres triángulos de Sierpinski

Reemplazando en la expresión para  $D$ , se obtiene:

$$D = \frac{\log 3}{\log 2} \approx 1,58496 \dots$$

la cola decimal es continua, pero el número no es periódico, siendo este número su dimensión fraccional o fractal; aunque su dimensión topológica sigue siendo 2.

Al calcular la dimensión fractal de un objeto real los resultados pueden variar bastante de acuerdo a las escalas usadas para medirlo y al método de cálculo.

Lo anterior también lo podemos describir de la siguiente manera: Un intervalo es la unión de dos intervalos semejantes de razón  $\frac{1}{2}$ , un cuadrado es la unión de cuatro cuadrados semejantes de razón  $\frac{1}{2}$ , un cubo es la unión de 8 cubos semejantes de razón  $\frac{1}{2}$ , y así sucesivamente. Entonces...

Para un segmento,

$$\left(\frac{1}{2}\right)^1 + \left(\frac{1}{2}\right)^1 = 2 \left(\frac{1}{2}\right)^1 = 1$$

Para un cuadrado,

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 4 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1$$

Para un cubo,

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 8 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 1$$

Obsérvese que los exponentes de las potencias coinciden con la dimensión del conjunto, 1 para el intervalo, 2 para el cuadrado y 3 para el cubo.

En general, si un conjunto es la unión de  $n$  partes semejantes con razones  $\{r_1, r_2, \dots, r_n\}$ , se llama dimensión fractal (dimensión de autosemejanza) del conjunto, al único número  $D$  que verifica:

$$r_1^D + r_2^D + r_3^D + \dots + r_n^D = 1$$

En el caso particular de que todas las partes sean de la misma razón  $r$ , la dimensión fractal es:

$$r_1^D + r_2^D + r_3^D + \dots + r_n^D = nr^D = 1 \Rightarrow \left(\frac{1}{r}\right)^D = n \Rightarrow D = \log_{\frac{1}{r}} n = \frac{\log n}{\log \frac{1}{r}}$$

Esta ultima parte resulta conveniente si queremos hallar la dimensión del conjunto de cantor.

### Dimensión de Minkowski

Suponiendo que tenemos un segmento de línea de longitud  $\ell$  y con centro en cada uno de sus puntos trazamos una circunferencia de radio  $\varepsilon > 0$ , pequeño en comparación con  $\ell$ . Se obtendrá una figura parecida a una salchicha para la cual su área superficial:

$$A(\varepsilon) = 2\ell\varepsilon + \pi\varepsilon^2$$

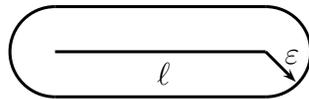


Figura 5.28: Salchicha de Minkowski de un segmento

De la expresión anterior se deduce que si  $\varepsilon$  es muy pequeño, el segundo término se puede despreciar, por lo que el área de la salchicha queda aproximadamente proporcional a  $\varepsilon$ .

Pero lo realmente importante no es que sea proporcional a  $\varepsilon$ , es que  $\varepsilon$  está elevado a la potencia de 1, y que 1 es precisamente la dimensión del segmento. De esta forma, si la

curva objeto de estudio es una curva fractal, los círculos cubrirán un área más grande, debido a las irregularidades de la curva, y el área de la salchicha ya no será proporcional a  $\varepsilon$ , sino a una potencia de  $\varepsilon$ ,  $\varepsilon^d$  con  $d > 1$ . Este exponente es la dimensión de Minkowski de la curva.



Figura 5.29: Salchicha de Minkowski para cinco valores diferentes de  $\varepsilon$

La ecuación para obtener la dimensión de Minkowski es la siguiente:

$$d = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\log \text{Area}(\text{Salchicha})}{\log \varepsilon}$$

La dimensión de Minkowski, es una valiosa herramienta teórica, pero por desgracia es muy difícil de llevar a la práctica a la hora de calcular la dimensión de fractales naturales, tales como nubes o líneas de costa<sup>7</sup>.

### El método de Box-Counting

Teóricamente y en la práctica, a la hora de determinar la dimensión fractal de un conjunto, se aplica el concepto de Hausdorff, cuando se trabaja con datos reales, la

<sup>7</sup>Proyecto Fin de Carrera, Generación Gráfica de Fractales, Daniel Derlinchán González Septiembre 2004

experiencia requiere la utilización de técnicas más simples, basadas en la teoría de la medida de Hausdorff, pero con fácil implementación en un ordenador en el cual, esta vez de manera más aplicable, podemos hacer cálculos de dimensiones de fractales naturales.

Como su traducción directa lo indica, es una técnica basada en el conteo de cajas o celdas. El procedimiento es más o menos el siguiente: Supongamos que tenemos una curva de la cual deseamos saber su dimensión, la encerramos en una cuadrícula, de forma que la curva quede completamente dentro de ella. A continuación se cuentan todos aquellos cuadros de la cuadrícula que son cortados por la curva, luego se divide cada longitud de los cuadros en dos y se cuenta nuevamente los cuadros de la cuadrícula que son cortados por la curva. Este proceso se va repitiendo una y otra vez, pero en cada paso la longitud de los cuadros de la cuadrícula se divide en dos.

Se representa por  $N(k)$  el número de cuadros de la cuadrícula que son cortados por la curva en la iteración  $k$ . De esta forma, para un segmento rectilíneo, en cada iteración se duplicaría el número de cuadros cortados, ya que el lado de cada uno de ellos se ha reducido a la mitad.  $N(k)$  se aproximaría entonces a:

$$N(k) \approx 2^k$$

Pero si la curva es una curva fractal, como la de la siguiente figura, entonces el número de cuadros que la cortan crecería con  $k$  a un ritmo mayor. Se puede aproximar entonces  $N(k)$  a:

$$N(k) \approx 2^d k, \quad d > 1$$

El exponente  $d$  que multiplica a  $k$  es la dimensión fractal. La ecuación para obtener esta dimensión fractal es la siguiente:

$$d = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log N(k)}{\log k}$$

En la práctica, ya que es imposible examinar un número infinito de cuadrículas, se determina un rango adecuado para  $k$  según el objeto que se esté estudiando.

Bueno siguiendo con la dimensión fractal, se puede también pensar por lo tanto en la rugosidad como en un incremento de la dimensión: una curva rugosa tiene dimensión entre 1 y 2, mientras que una superficie rugosa tiene dimensión entre 2 y 3. Desde este punto de vista, rectas y planos pueden pensarse como casos límite. En una curva, la dimensión fractal es un número que caracteriza la forma en la cual la longitud medida entre dos puntos dados crece mientras la escala decrece.

Un fractal determinista, en cualquier escala de observación, dará el mismo valor de dimensión fractal, o sea, es perfectamente autosemejante. Tomando por ejemplo, el

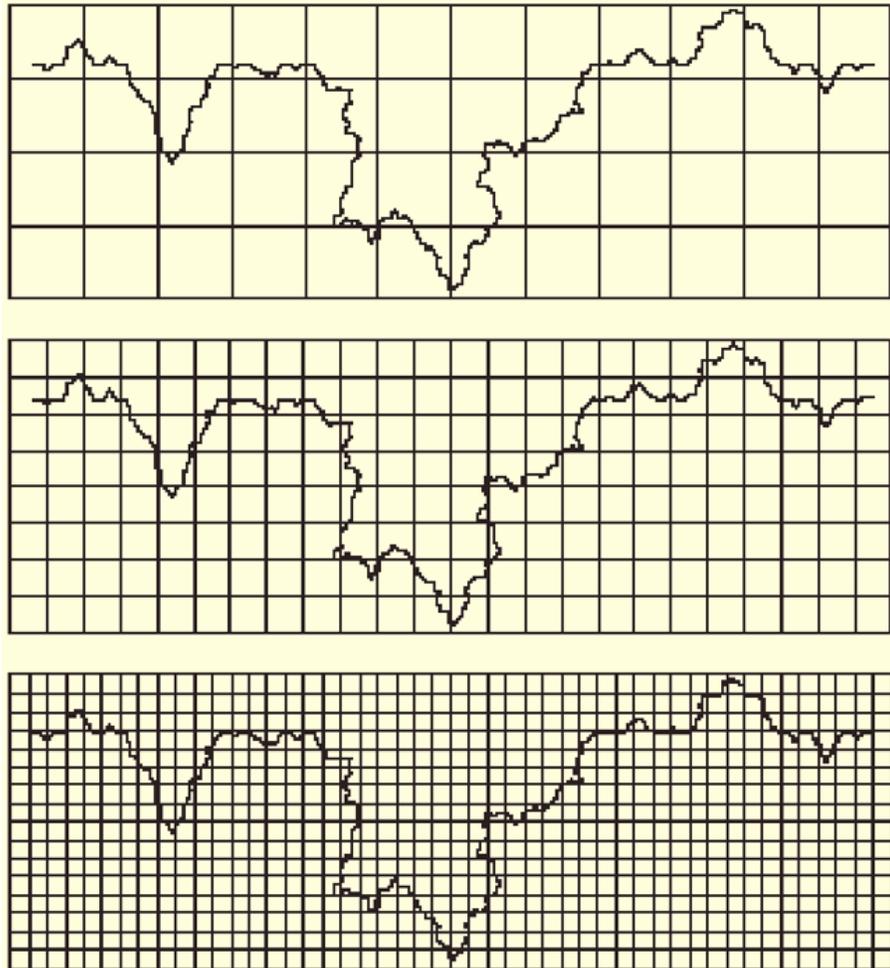


Figura 5.30: En cada iteración se divide cada cuadro en otros 4 nuevos.

contorno de una ciudad no es un fractal determinista, con lo que la comprobación de autosemejanza no registrará valores de dimensión fractal idénticos, aunque podemos admitir, al encontrar valores similares, que la forma muestra propiedades análogas a la autosemejanza fractal. Esta es en parte debido a que la morfología de una ciudad es el resultado de una multitud de procesos físicos y sociales.

Podríamos, por ejemplo, calcular la dimensión fractal del contorno del mapa del municipio de Neiva, departamento del Huila. Considerando dicho contorno como un fractal aleatorio o estadístico se puede aplicar la técnica de las cuadrículas anteriormente mencionada también llamada conteo de cajas.

Para la obtención del contorno de la ciudad se emplea el análisis visual de imágenes por satélites, se puede utilizar el programa gratuito Google Earth, en mi caso la imagen la encontré en <http://www.sirhuila.gov.co/files/mapas-mpios/NEIVA.jpg>. Una vez obtenida la imagen (entre mayor resolución tenga esta imagen, mucho más acertado será el cálculo) se digitaliza el contorno con un programa de dibujo por capas (Corel-draw o Photoshop) y se debe pasar a imagen binaria en formato TIFF o BMP.

Cada uno de los contornos obtenidos es una curva de la que se puede calcular computacionalmente una estimación de la dimensión fractal mediante el método de conteo de cajas (box counting), utilizando para ello el programa *Fractalyse* desarrollado por el Research Centre Thénia (CNRS-Université de Franche-Comté) y que se puede descargar gratuitamente desde la página <http://www.fractalyse.org/en-home.html> Podemos encontrar otros programas como *ImageJ* desarrollado por Wayne Rasband del National Institutes of Health.

Se hará este trabajo haciendo énfasis en algunos pasos:



Figura 5.31: Mapa político del Municipio de Neiva

1. Utilizando el programa de capas haremos el croquis del mapa, si ya encontramos el mapa solo el croquis nos evitamos ese trabajo, si embargo hay que tener en cuenta los formatos que soporta Fractalyse, con Paint se puede pasar a otros formatos.



Figura 5.32: Croquis del Municipio de Neiva

2. Ahora ejecutamos el programa Fractalyse, cargamos la imagen obtenida, y seleccionamos Analyse/Box y dentro del menú emergente seleccionamos el tamaño de caja como exponencial (*Exponential*) y el algoritmo tipo rejilla (*Gris*). Seleccionamos OK.

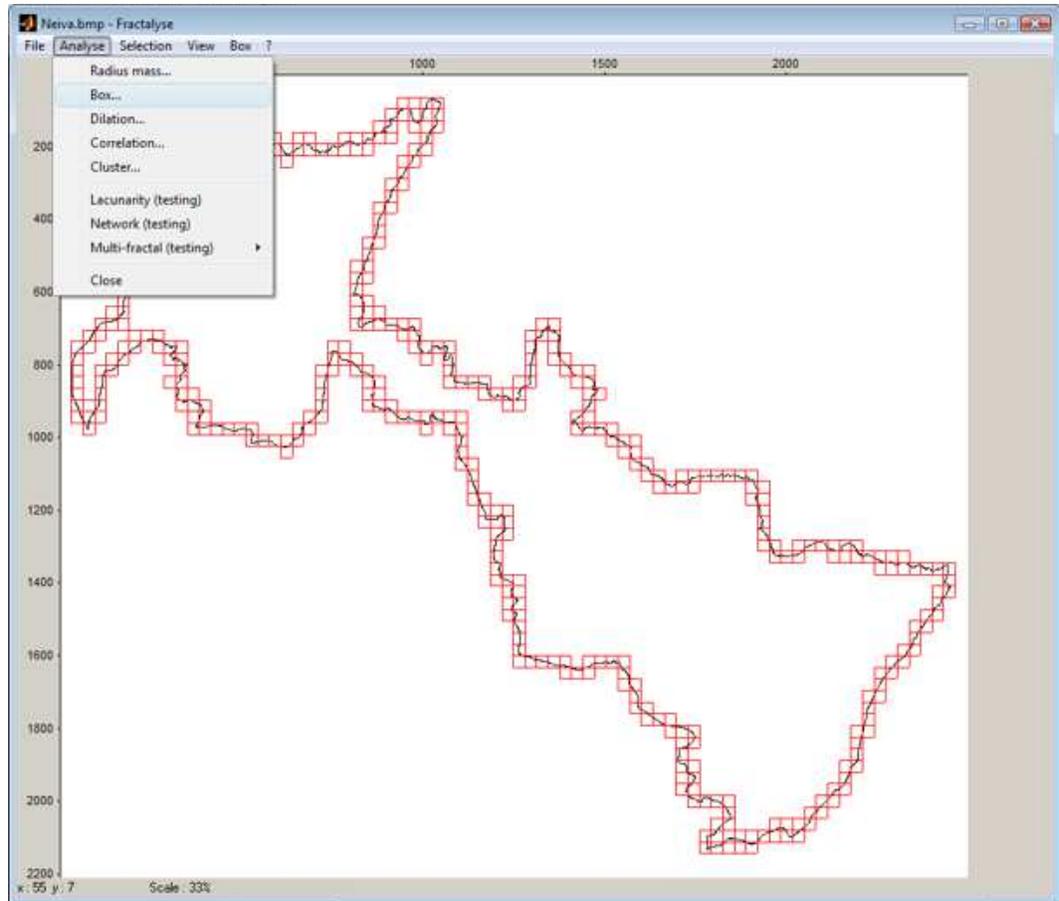


Figura 5.33: Croquis del Municipio de Neiva

Una vez seleccionado OK se abre una nueva ventana en donde van a aparecer los resultados del calculo. En nuestro caso la dimensión fractal del croquis del mapa del municipio de Neiva es aproximadamente 1,177, sin embargo este dato está sujeto a muchas otras variables si no se hace bien el croquis. Hice el mismo calculo colocando la linea del croquis un poco mas gruesa y la dimensión aumento un poco, aproximadamente 1,235.

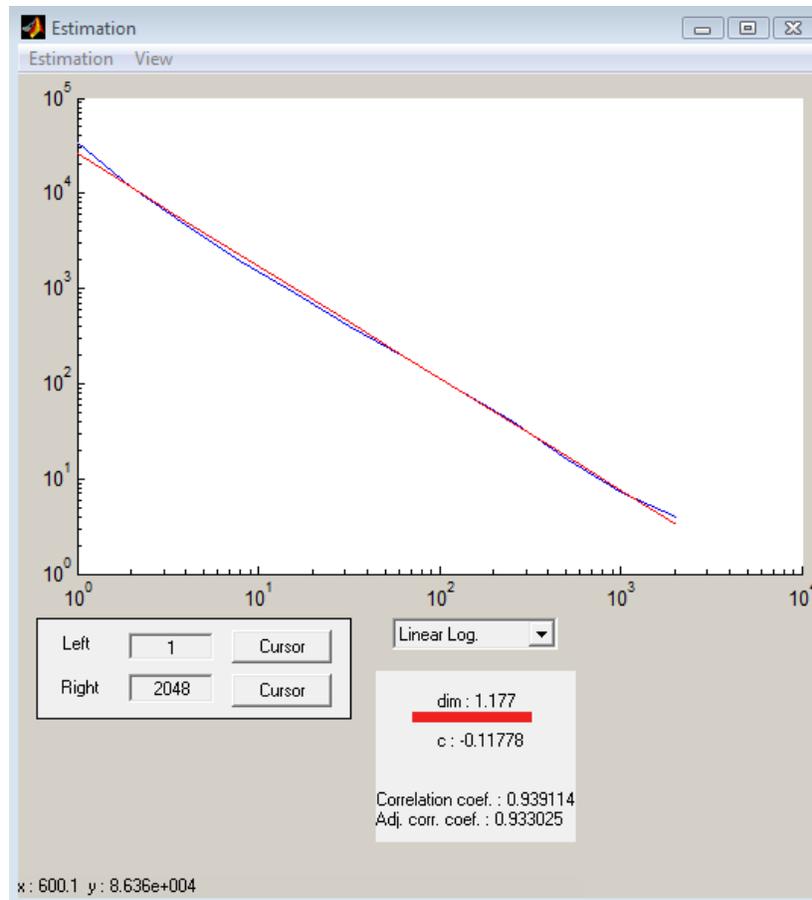


Figura 5.34: Ventana donde se muestra el resultado

Lo anterior aparece también como una propuesta de trabajo para los estudiantes de matemáticas en educación media y universitaria. La propuesta es realizada por J.Comas Roqueta, Dimensión fractal del contorno de una ciudad[2].

## 5.5. SISTEMAS DINÁMICOS EN EL PLANO COMPLEJO

### 5.5.1. ¿Qué es un Sistema Dinámico en Plano Complejo?

La idea general de Sistema Dinámico ha estado inmersa a lo largo de este trabajo de grado: La iteración. En este caso, la iteración consiste en aplicar una determinada operación a un número; Luego, el resultado obtenido se le vuelve a aplicar la misma operación y así indefinidamente. Este proceso se puede expresar de manera general como

$$X_0 \text{ es el estado inicial del proceso, y,}$$

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Por ejemplo, la función  $f$  podría ser la función cuadrado. De esta forma, la expresión quedaría de la siguiente manera:

$$x_{n+1} = x_n^2$$

Al aplicar este proceso a un valor cualquiera, por ejemplo,  $x_0 = 2$ , la primera iteración  $x_1 = 2^2 = 4$ , la segunda iteración  $x_2 = 4^2 = 16$ , y así sucesivamente. Por lo que la órbita futura de 2 mediante  $f$  es

$$\{2, 4, 16, 256, 65536, \dots\}$$

El valor al que tiende la órbita se le denomina atractor. Por lo que en este caso el atractor de la órbita es el infinito. Si se aplica el mismo proceso con otro valor inicial, por ejemplo,  $x_0 = 0,5$ , la órbita obtenida es

$$O_f^+(\frac{1}{2}) = \{0,5, 0,25, 0,625, 0,00390625 \dots\}$$

La cual converge hacia cero.

Es decir que el atractor de la órbita anterior es el número 0. Ahora bien, si hacemos  $x_0 = 1$  elevar  $1^2$ , se mantiene el valor inalterado. A este tipo de atractores se les denomina *punto fijo*, y consiste en aquel número cuyo valor no cambia al aplicarle la iteración. De hecho el valor anterior, el 0, también es punto fijo, ya que aplicarles la función cuadrado no le afecta.

Luego, se define un Sistema Dinámico como el par  $(X, f)$ , donde  $X$  es un conjunto no vacío y  $f$  una aplicación de la forma  $f : X \rightarrow X$ . La aplicación  $f$  puede ser cualquiera y  $X$ , que en el ejemplo anterior se ha supuesto que es el conjunto de los

números reales, bien puede ser también, el conjunto de los enteros positivos. Pero en nuestro caso tomaremos Sistemas Dinámicos en Plano Complejo, con el par  $(\mathbb{C}, f)$ , donde  $\mathbb{C}$  es el conjunto de los números complejos y  $f$  una aplicación de la forma  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ .

### 5.5.2. Biomorfos

En el apartado anterior se han estudiado los componentes necesarios para formar un Sistema Dinámico en el Plano Complejo,  $\mathbb{C}$  El conjunto de los números complejos,  $f$  Una aplicación de la forma  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $z_0$  El valor inicial de la iteración.

Ahora bien, dependiendo del valor inicial escogido, la órbita del sistema avanzará hacia un atractor u otro. Si el atractor es el infinito, se dice que el valor inicial es un *valor de escape*. Si el atractor es un punto fijo distinto de infinito, se dice que el valor inicial es un valor prisionero. Luego el conjunto de todos los valores de escape se denomina *conjunto de escape*, y el conjunto de todos los valores prisioneros se denomina *conjunto prisionero*.

Con lo anterior fácilmente podemos hacernos una pregunta, ¿Cuales puntos del plano complejo pertenecerían al **conjunto prisionero** y cuales pertenecerían al **conjunto de escape**?. Pues bien, la representación gráfica de la pregunta anterior es lo que se conoce como **biomorfo**, y existen tantos como combinaciones de funciones  $f$  haya, es decir, infinitos.

La figura 6.33 representa el **biomorfo** correspondiente a la función:

$$f(z_n) = \sin(z_n^2)$$

Mostrando en color negro aquellos valores iniciales del plano complejo que pertenecen al conjunto prisionero y en el otro color los valores iniciales que pertenecen al conjunto de escape <sup>8</sup>.

### 5.5.3. El conjunto de Julia

A principios del siglo XX, dos matemáticos franceses se destacaron en el estudio de los Sistemas Dinámicos en Plano Complejo, Gaston Julia y Pierre Fatou. Los resultados de estos estudios constituyeron la base para la revolución fractal que se produjo en los años 80. Además, animaron a Mandelbrot a continuar la investigación en este campo,

---

<sup>8</sup>Proyecto Fin de Carrera, Generación Gráfica de Fractales, Daniel Derlinchán González Septiembre 2004

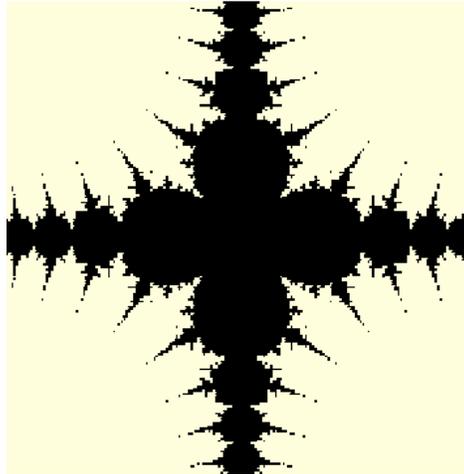


Figura 5.35: Biomorfo de la función  $f(z_n) = \sin(z_n^2)$

especialmente con el estudio de la siguiente función

$$f(Z) = Z_n^2 + C$$

La constante  $c$ , puede ser cualquier número que pertenezca al plano complejo. Por lo tanto, la órbita que seguiría la función dependería ahora de dos parámetros, el valor inicial  $z_0$  escogido y la constante  $c$ . El resto del funcionamiento es exactamente igual al estudiado en el apartado anterior.

Por lo tanto, en este caso también existe un conjunto prisionero y un conjunto de escape. De esta forma, se define el conjunto de Julia como “la curva que separa el conjunto prisionero del conjunto de escape”. Hay que notar que esta curva de separación también pertenece al conjunto prisionero. Si esto no fuera así, escaparían irremediabilmente en una órbita hacia el infinito.

Al igual que en el apartado anterior, para obtener qué puntos son de escape y qué puntos prisioneros, hay que recorrer todos y cada uno de los puntos de la porción del plano complejo que se quiere estudiar. Dado que ahora también entra en juego la constante  $c$ , existirán tantos conjuntos de Julia como constantes  $c$  haya, es decir, infinitos.

A continuación se muestran algunos ejemplos de conjuntos de Julia según la constante  $c$ . Aunque en la mayoría de aplicaciones de generación de fractales estos conjuntos aparecen con multitud de colores, aquí aparecen en blanco los puntos de escape y en negro los puntos prisioneros. La utilización de colores hace muy dificultosa la separación visual de las dos regiones.

Hay que observar la increíble sensibilidad del Sistema Dinámico a la constante  $c$ . Ante esto aparece una pregunta más que evidente, ¿hay alguna forma de clasificar tal cantidad de conjuntos?. La estructura de los conjuntos cambia tanto de un valor

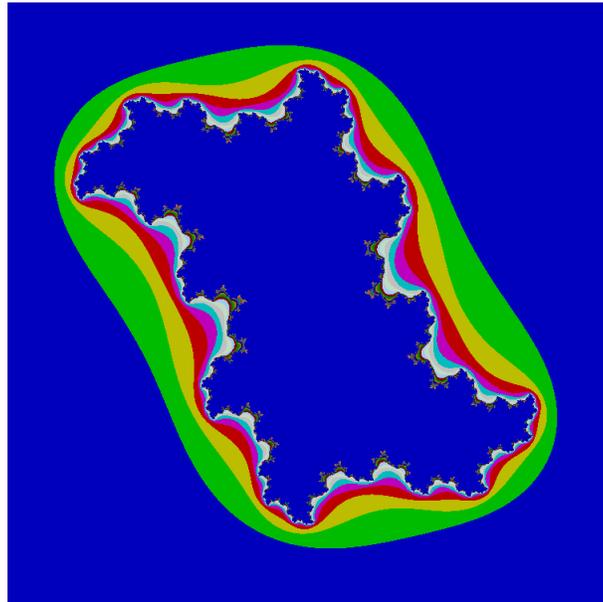


Figura 5.36: Conjunto de Julia para  $c = 0,123 + 0,567i$

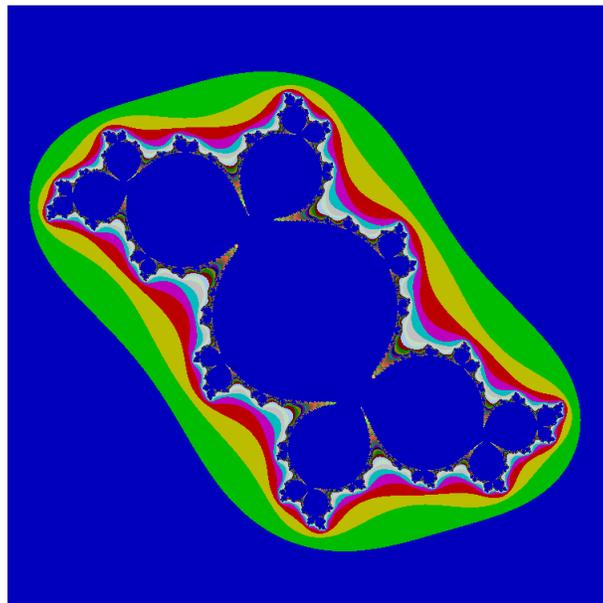


Figura 5.37: Conjunto de Julia para  $c = -0,123 + 0,666i$

de  $c$  a otro que intentar clasificarlos parece una locura. Pues en 1980, Mandelbrot demostró su increíble intuición visual con la ayuda de los ordenadores.

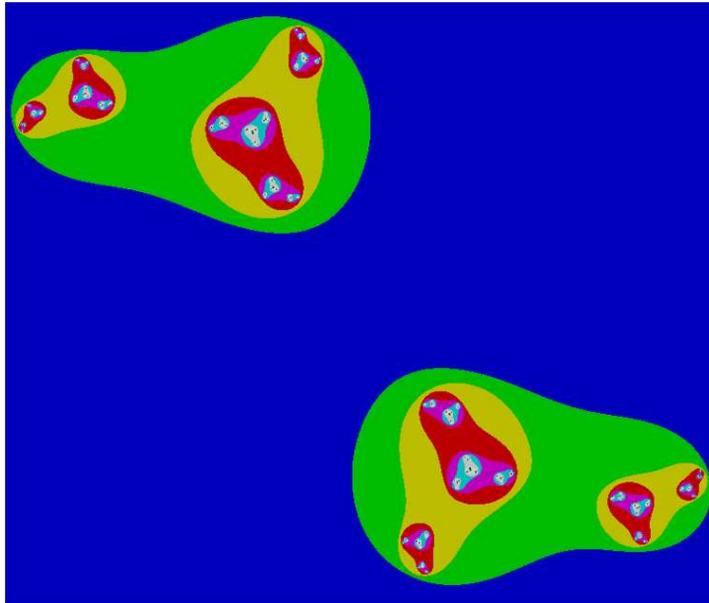


Figura 5.38: Conjunto de Julia para  $c = -0,156 + 1,432i$

### 5.5.4. El conjunto de Mandelbrot

De la infinita variedad de conjuntos de Julia, Mandelbrot observó que había algunos cuya superficie formaban un *conjunto conexo*<sup>9</sup>. Por el contrario, había otros que se difuminaban en una infinita variedad de puntos, formaban por lo tanto un conjunto disconexo<sup>10</sup>. Dado que la función

$$f(z_n) = z_n^2 + c$$

Generaba un conjunto de Julia distinto para cada valor de  $c$ , y dado que Mandelbrot clasificó dichos conjuntos en conexos y disconexos, ahora podríamos hacer otra pregunta, ¿para qué valores de  $c$  el conjunto será conexo y para qué valores disconexo?

En principio parece una tarea increíblemente costosa, ya que habría que analizar la forma que tiene el conjunto de Julia para cada uno de los puntos del plano complejo. Para evitar esto, Mandelbrot utilizó un teorema que demostraron de forma independiente Julia y Fatou alrededor de 1919.

El teorema afirmaba que todos los valores de  $c$  que hacían aparecer el conjunto de Julia como conexo compartían una misma propiedad. Esta propiedad consistía en que si se hace iterar el sistema utilizando como valor inicial el número complejo  $z_0 = 0 + 0i$ , éste se comportará como prisionero. Es decir, para un determinado valor de  $c$ , si el valor inicial  $z_0 = 0 + 0i$  se comporta como prisionero, el conjunto de Julia es conexo. Si se comporta como valor de escape, el conjunto de Julia es disconexo.

El efecto causado por este teorema es sorprendente, ya que basta con examinar un único punto para obtener las propiedades de un conjunto de Julia, propiedades para las que habría hecho falta examinar todos los puntos del plano complejo. A partir de aquí, Mandelbrot se dedicó a localizar aquellos puntos del plano complejo cuyo conjunto de Julia equivalente poseía la propiedad de ser conexo. Al hacerlo, se encontró con una estructura sorprendente, que aún hoy sigue sorprendiendo a quien se dedique a estudiarla, y que en su honor recibió el nombre de conjunto de Mandelbrot.

En el conjunto de Mandelbrot los puntos negros son números complejos para los que el conjunto de Julia es conexo, y los otros colores para aquellos cuyo conjunto de Julia sea disconexo.

### 5.5.5. Interpretación del conjunto de Mandelbrot

En realidad, el objetivo principal de construir el conjunto de Mandelbrot consiste en desentrañar que relación tiene la posición de un determinado punto  $c$  dentro del

---

<sup>9</sup>Intuitivamente, un conjunto conexo es aquel formado por una sola “pieza”, que no se puede “dividir”. Cuando un conjunto no sea conexo, diremos que es disconexo.

<sup>10</sup>También llamados polvos de Fatou.

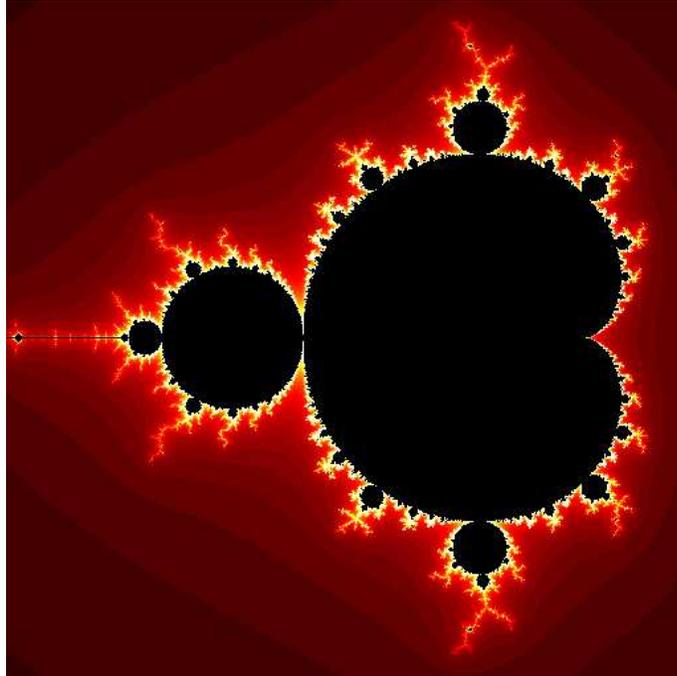


Figura 5.39: Conjunto de Mandelbrot

conjunto y la apariencia estructural del conjunto de Julia equivalente al utilizar ese punto para generarlo.

Lo que al principio pretendió ser una mera tabla de clasificación de conjuntos de Julia conexos/disconexos, ha resultado ser un increíble mapa donde están ‘‘codificadas’’ todas las propiedades de cada uno de los posibles conjuntos de Julia.

Por ejemplo,

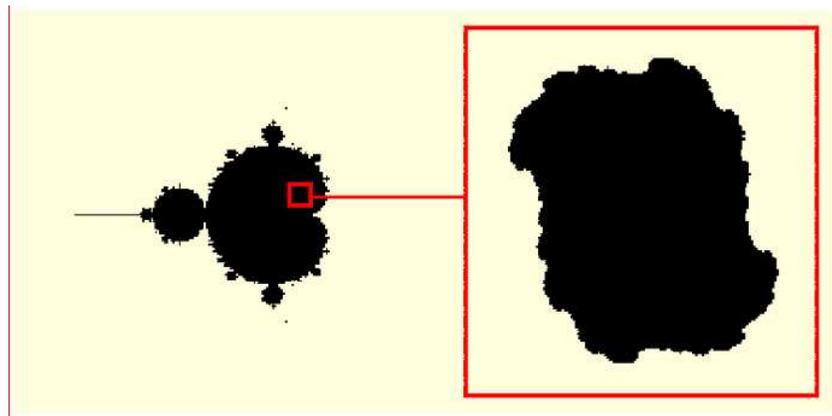


Figura 5.40: Si el valor de  $c$  se encuentra dentro del cuerpo principal del conjunto de Mandelbrot, la forma equivalente del conjunto de Julia es parecida a una mancha arrugada, como se ve en esta figura.

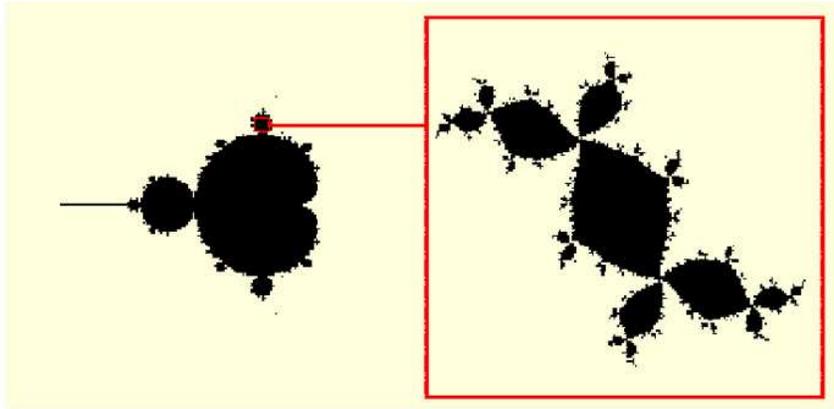


Figura 5.41: Si el valor de  $c$  se encuentra dentro de uno de los “hijos”, la forma de Julia aparece con multitud de círculos a su alrededor, al estilo de un cactus, como en esta figura.

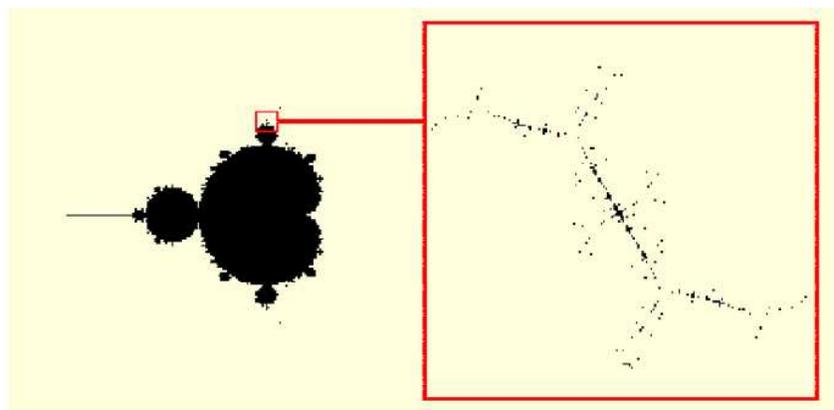


Figura 5.42: Si el valor de  $c$  se encuentra dentro de algún filamento, la forma de Julia se adelgaza hasta formar una estructura dendrítica, como se observa.

La mayoría de los dibujos del conjunto de Mandelbrot, suelen aparecer coloreados según la velocidad con que cada punto converja a infinito, es decir, hay puntos en el plano que con solo iterarlos un par de veces podemos decidir si este converge o diverge, generalmente son los puntos que bien se encuentran hacia el centro del conjunto o se encuentran muy retirados del mismo, contrario sucede con los puntos que están demasiado cerca del límite, para estos puntos resulta un poco complicado decidir si converge o no, se necesita de muchas iteraciones para comprobarlo, precisamente en eso consiste la geometría fractal, por la irregularidad de la curva límite no es fácil decidir para un sin número de puntos si esta dentro del conjunto o fuera del conjunto, en ocasiones ni los ordenadores de última gama pueden hacer esto, pues hay un número limitado de iteraciones, por muy grande que sea este.

El algoritmo para dibujar el conjunto de Mandelbrot es el siguiente: para cada punto  $c$ , iteramos la función un número suficiente de veces, si permanece acotada por 2, entonces razonablemente podemos suponer que se encuentra en el conjunto de Mandelbrot. En el gráfico siguiente podemos ver más ejemplos de la relación entre el conjunto de Mandelbrot y los conjuntos de Julia.

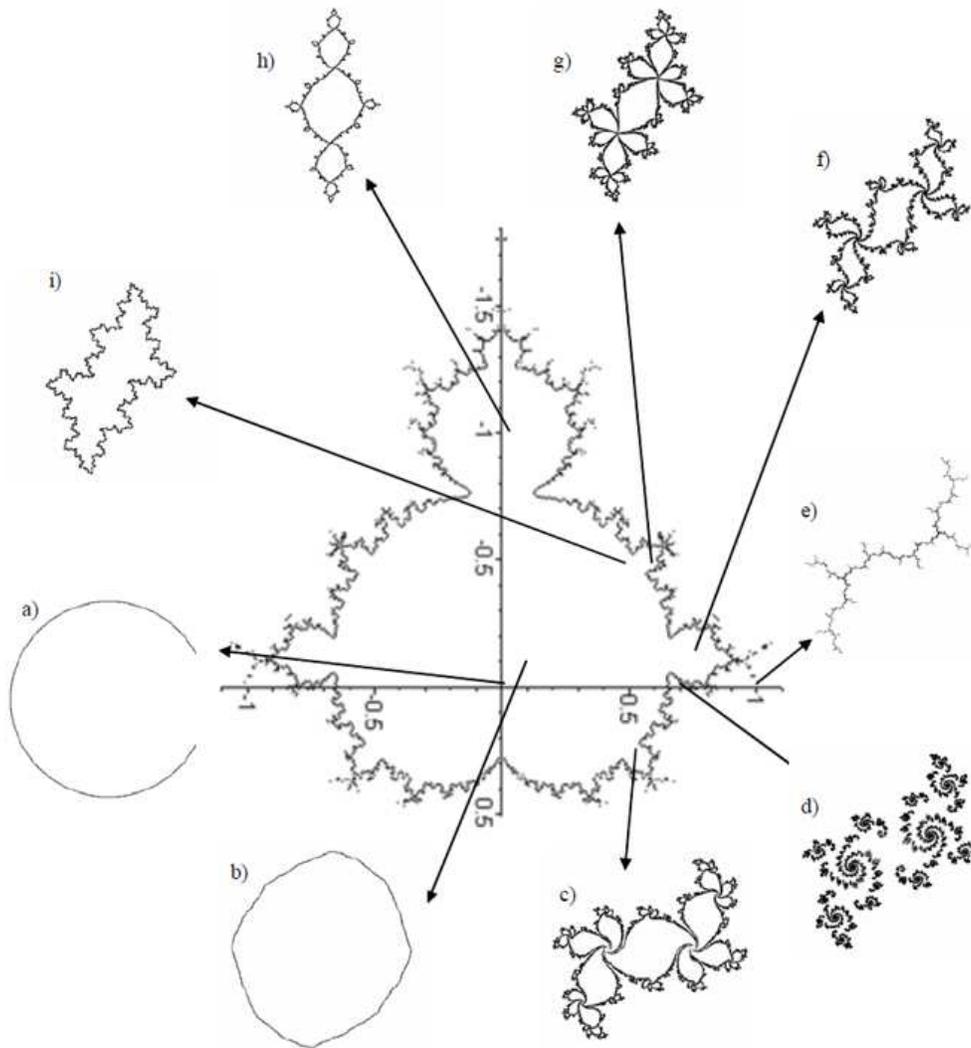


Figura 5.43: Relación entre el conjunto de Julia y Mandelbrot

Veamos a qué valores de  $c$  corresponde cada gráfico: a) corresponde a  $c = 0$ , b)  $c = -0,1 + 0,1i$ , c)  $c = 0,25 + 0,52i$ , d)  $c = 0,68i$ , e)  $c = i$ , f)  $-0,22 + 0,75i$ , g)  $c = -0,5 + 0,55i$ , h)  $c = -1 + 0,05i$  y i)  $c = -0,5 + 0,5i$ . Mirando con atención podemos apreciar algunos rasgos característicos de los conjuntos: a), b) y i) están dentro del bulbo principal del conjunto de Mandelbrot y sus gráficos se corresponde a curvas cerradas simples. En cambio h) está en el bulbo secundario, su gráfico no es una curva cerrada simple, pero en cada punto de contacto une dos regiones. En cambio f) c) y g) que se encuentran dentro de bulbos más pequeños, en cada punto de contacto unen tres, cuatro y cinco regiones. El gráfico de d) está fuera del conjunto y es entonces totalmente desconexo.

## 5.6. FRACTALES DE CONSTRUCCIÓN GEOMÉTRICA RECURSIVA

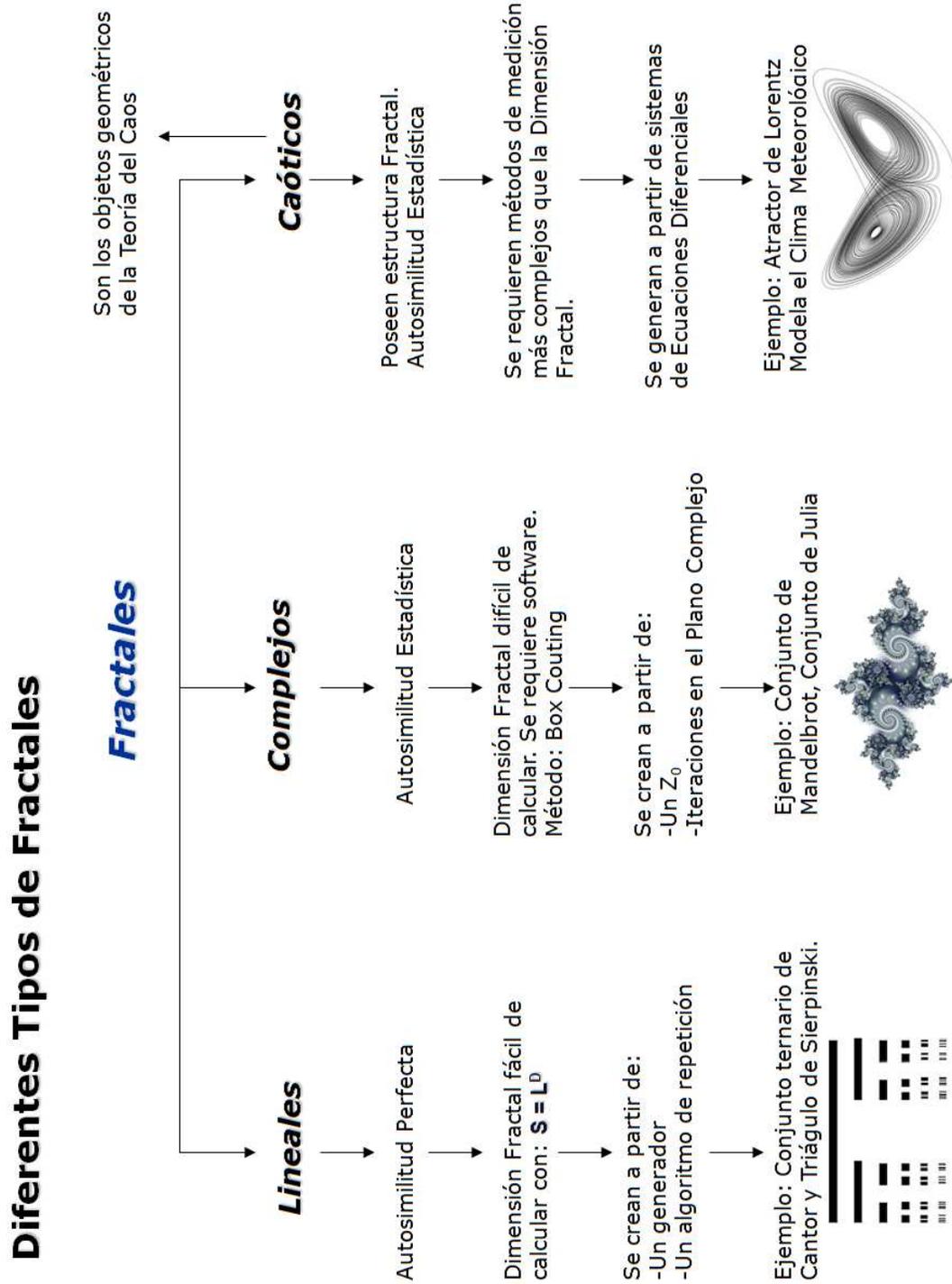


Figura 5.44: Tipos de fractales, ver [9]

Aunque el término fractal es reciente ya se conocían algunos ejemplos desde hace varios años. Estos conjuntos y curvas fueron admirados por muchos matemáticos comprometidos en explicar su comportamiento ya que son objetos obtenidos al aplicar un algoritmo iterativo, es decir, aplicar un proceso una y otra vez a partir de un estado inicial.

El proceso de iteración parte de un estado inicial  $x_0$  que se transforma en un estado siguiente  $f(x_0)$  mediante la aplicación  $f$  y así sucesivamente obteniéndose diferentes estados sucesivos que cambian con el tiempo, esto es,

$$x_0, f(x_0), f(f(x_0)), f(f(f(x_0))), f(f(f(f(x_0))))), \dots$$

Lo cual nos origina la denominada órbita de la aplicación de  $f$  en el punto  $x_0$ .

A continuación presentaré un grupo de fractales geométricos clásicos. Todos ellos fueron creados a finales del siglo XIX o a comienzos del siglo XX. Nada más ver la luz fueron tachados de monstruos geométricos por algunos famosos matemáticos de la época como Poincaré. A la larga alentaron la búsqueda rigurosa de conceptos como infinito, curva continua o dimensión. Veamos algunos de ellos.

### 5.6.1. FRACTAL CONJUNTO TERNARIO DE CANTOR

El conjunto de Cantor toma su nombre de Georg Cantor que en 1883 lo utilizó como herramienta de investigación para una de sus principales preocupaciones: el continuo. Su verdadero creador fue Henry Smith, un profesor de geometría de Oxford, en 1875. Es uno de los fractales más antiguos y para obtenerlo se procede del siguiente modo.

Partimos de un segmento de tamaño unidad,  $S_0 = [0, 1]$ , tal y como se muestra en el paso  $n = 1$  de la figura siguiente. Dividimos el segmento en tres subsegmentos de tamaño  $\frac{1}{3}$  cada uno. Borrarnos el central y nos quedamos con los intervalos cerrados restantes:

$$S_{1,1} = \left[0, \frac{1}{3}\right] \quad \text{y} \quad S_{1,2} = \left[\frac{2}{3}, 1\right]$$

Así obtenemos el resultado del paso  $n = 2$  de la figura inferior. Repitiendo la división en tres partes cada uno de estos segmentos y borrando de nuevo el fragmento central de cada uno, obtenemos los cuatro intervalos siguientes ( $n = 3$  en la figura inferior):

$$S_{2,1} = \left[0, \frac{1}{9}\right], \quad S_{2,2} = \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right], \quad S_{2,3} = \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right], \quad S_{2,4} = \left[\frac{8}{9}, 1\right]$$

Cada uno posee longitud  $\frac{1}{9}$ .

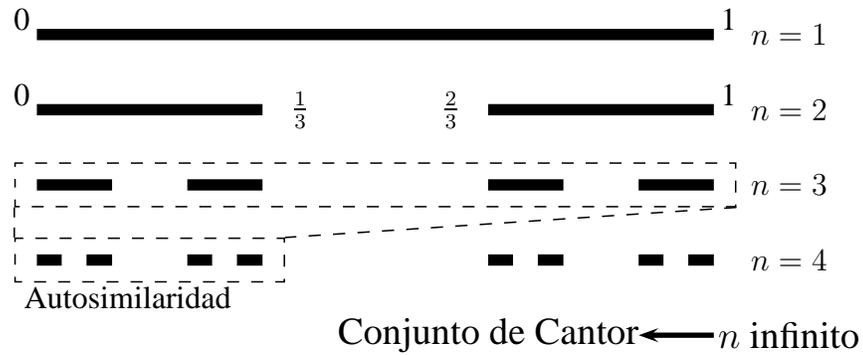


Figura 5.45: Conjunto de Cantor

Observemos la secuencia de longitudes: comenzando con el segmento  $S_0$  de longitud 1 y tras la división pasamos a tener 2 segmentos,  $S_{1,1}$  y  $S_{1,2}$ , de longitud  $\frac{1}{3}$  cada uno. En la operación número 2, tenemos  $4 = 2^2$  segmentos ( $S_{2,1}, \dots, S_{2,4}$ ) de longitud  $\frac{1}{9} = \frac{1}{3^2}$  cada uno. Si repetimos el proceso de dividir en tres segmentos iguales y borrar el central, en el paso  $n$ -ésimo tendremos  $2^n$  intervalos cerrados o segmentos ( $S_{n,1}, S_{n,2}, \dots, S_{n,2^n}$ ) cada uno de ellos de longitud  $\frac{1}{3^n}$ .

He aquí la secuencia del número de segmentos y sus respectivas longitudes en sucesivas iteraciones:

| Numero de Segmentos | Longitud del segmento |
|---------------------|-----------------------|
| 2                   | $\frac{1}{3}$         |
| 4                   | $\frac{1}{9}$         |
| 8                   | $\frac{1}{27}$        |
| $\vdots$            | $\vdots$              |
| $2^n$               | $\frac{1}{3^n}$       |

Después de infinitos pasos obtendremos el subconjunto de los números reales que denominamos conjunto de Cantor o polvo de Cantor.

Ahora calculamos la longitud final de los segmentos eliminados sucesivamente, esto es,

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + \frac{8}{81} + \dots = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{3^n} = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} \right) = \frac{1}{3} (3) = 1$$

Aquí cabría una pregunta ¿Será que nos quedamos con algo si la suma de los segmentos que quitamos da 1?. La respuesta es sí, pues si recordamos los intervalos borrados son abiertos y nos quedamos con los cerrados, es decir, cuando borramos el intervalo  $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$  se salvan de la quema los puntos  $\frac{1}{3}$  y  $\frac{2}{3}$ , es decir, los extremos del intervalo borrado. Así que los extremos de los intervalos nunca son eliminados. Podemos concluir que

el Conjunto de Cantor no es vacío. Tenemos puntos como  $0, 1, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \dots$  que pertenecen al mismo.

Nuestro interés se centra en la geometría fractal, y el conjunto de Cantor exhibe de forma evidente una de las propiedades más importantes de los fractales: la autosimilaridad. Tomando el intervalo  $[0, \frac{1}{3}]$  y ampliándolo 3 veces, obtendremos de nuevo el conjunto de Cantor original. Si tomamos el intervalo  $[0, \frac{1}{9}]$  y lo ampliamos 9 veces obtendremos de nuevo el conjunto de Cantor. De hecho, desde cualquier nivel podemos conseguirlo. De modo que toda parte, por minúscula que sea, contiene la información del todo.

Cualquier parte de una línea recta es una línea recta idéntica a la total salvo por un factor de escala. Observa sin embargo que muchas formas euclídeas no tienen esta propiedad. Un arco de círculo no es un círculo por sí mismo o un lado de un triángulo no es triangular.

Generalizando, la  $n$ -ésima extracción quedará  $2^n$  intervalos cerrados de longitud igual a  $\frac{1}{3^n}$  con un factor de ampliación de  $3^n$

Así, podemos hallar la dimensión de este fractal utilizando la extensión del método de similitud por duplicación. El conjunto de Cantor está formado por dos partes que son semejantes al total de razón  $\frac{1}{3}$  y, en este caso, la potencia adecuada es:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^D + \left(\frac{1}{3}\right)^D = 1 \Rightarrow 2\frac{1}{3^D} = 1 \Rightarrow 3^D = 2 \Rightarrow D = \log_3 2 = \frac{\log 2}{\log 3} \approx 0,6309\dots$$

Observa que esta dimensión concuerda con los datos que se conocen del conjunto de Cantor, ya que es más grande que un conjunto numerable de puntos (dimensión 0) y más pequeño que un segmento (dimensión 1). Pero vemos que este valor es inferior al de su dimensión topológica, por ello, no se considera propiamente un fractal dentro de la definición planteada por Mandelbrot, puesto que según él dice que un objeto es fractal cuando su dimensión fraccional es mayor que su dimensión euclídea o topológica.

### 5.6.2. FRACTAL CURVA DE KOCH

Como ya había dicho el creador en 1904 de este monstruo fue Niels Fabian Helge von Koch, matemático sueco.

Partamos de un triángulo equilátero de lado unidad. Dividimos en tres partes iguales de longitud  $\frac{1}{3}$  cada lado. Sustituimos el segmento central por dos segmentos de tamaño idéntico formando un diente como muestra la figura en la iteración ( $n = 1$ ). Tenemos una curva poligonal  $P_1$  de longitud  $(3)(4)(\frac{1}{3}) = 4$ . Repetimos la operación ( $n = 2$ ) con cada uno de los cuatro nuevos segmentos de cada uno de los lados. Obtendremos así la

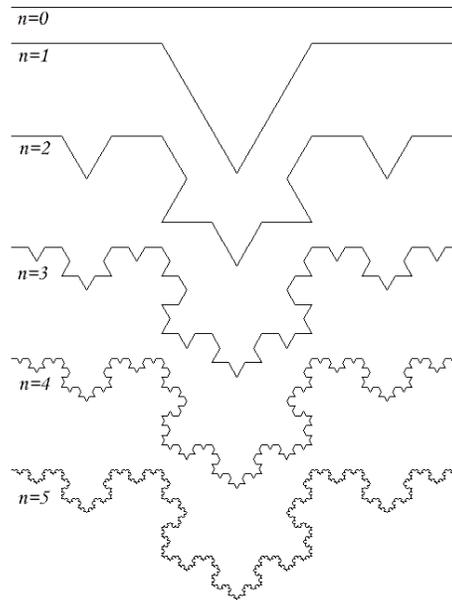


Figura 5.46: Curva de Koch

curva  $P_2$  de longitud  $(3)(4^2)(\frac{1}{3^2}) = 16/3$ . La iteración indefinida nos proporciona la isla de Koch o copo de nieve de Koch.

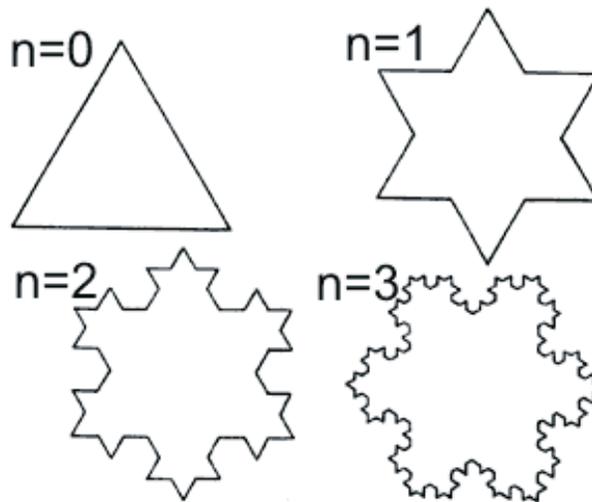


Figura 5.47: Éstas son las primeras cuatro etapas del proceso de iteración que da lugar a la curva de Koch.

En la operación  $n$ -ésima la curva estará formada por  $(3)(4^n)$  trozos, de perímetro  $(\frac{4^n}{3^{n-1}})$ . La curva de Von Koch resulta del paso al límite de la sucesión de curvas  $P_n$  cuando  $n$  tiende a infinito. ¿Cuál sería entonces la longitud del perímetro de esta isla? Pues bien miremos:

$$P_{\infty} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n}{3^{n-1}} = \infty$$

Es decir, aunque la isla de Von Koch ocupa una región limitada del espacio, un área **finita**, su perímetro es **¡infinito!**, esto realmente da dolor de cabeza, es aceptable una recta infinita, pero una curva de este estilo no, de ahí su monstruosidad.

A partir de los resultados obtenidos anteriormente también podríamos pensar en determinar el área “bajo” la curva de Koch. Para ello vamos a partir del triángulo equilátero, hay que tener en cuenta que el área de este viene dado por

$$A_{\blacktriangle} = \frac{\sqrt{3}}{4} l^2$$

donde  $l$  representa la longitud de los lados. Miremos el siguiente cuadro en donde relacionaremos la iteración con el número de lados y longitud del lado.

| ITERACIÓN | NUMERO DE LADOS | LONGITUD DEL LADO |
|-----------|-----------------|-------------------|
| 0         | $3 = 3(4^0)$    | $\frac{l}{3^0}$   |
| 1         | $12 = 3(4^1)$   | $\frac{l}{3^1}$   |
| 2         | $48 = 3(4^2)$   | $\frac{l}{3^2}$   |
| 3         | $192 = 3(4^3)$  | $\frac{l}{3^3}$   |
| 4         | $768 = 3(4^4)$  | $\frac{l}{3^4}$   |
| $\vdots$  | $\vdots$        | $\vdots$          |
| n         | $3(4^n)$        | $\frac{l}{3^n}$   |

Así, el área en la *iteración 0* es,

$$A_0 = \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{l}{3^0}\right)^2$$

que corresponde al simple triángulo equilátero, para la *iteración 1* hay que tener en cuenta que el área sería, el área anterior  $A_0$  más el área de tres nuevos triángulos de lado  $\frac{l}{3^1}$ , es decir, tantos triángulos como lados tiene la *iteración 0*, entonces

$$A_1 = \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{l}{3^0}\right)^2 + 3 \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{l}{3^1}\right)^2$$

en la *iteración 2* tendríamos que aumentar el área de  $12 = 3(4^1)$  triángulos de lado  $\frac{l}{3^2}$ , que corresponden a la cantidad de lados que tiene la *iteracion 1*, entonces,

$$A_2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{l}{3^0}\right)^2 + 3 \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{l}{3^1}\right)^2 + 3(4^1) \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{l}{3^2}\right)^2$$

Luego,

$$A_3 = \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{l}{3^0}\right)^2 + 3(4^0) \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{l}{3^1}\right)^2 + 3(4^1) \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{l}{3^2}\right)^2 + 3(4^2) \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{l}{3^3}\right)^2$$

En general el área  $A_n$  sería,

$$A_n = \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{l}{3^0}\right)^2 + 3(4^0) \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{l}{3^1}\right)^2 + 3(4^1) \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{l}{3^2}\right)^2 + \dots + 3(4^{n-1}) \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{l}{3^n}\right)^2$$

Simplificando

$$A_n = \frac{\sqrt{3}}{4} l^2 + 3 \frac{\sqrt{3}}{4} l^2 \left[ \left(\frac{4^0}{3^2}\right) + \left(\frac{4^1}{3^4}\right) + \dots + \left(\frac{4^{n-1}}{3^{2n}}\right) \right]$$

$$A_n = \frac{\sqrt{3}}{4} l^2 + 3 \frac{\sqrt{3}}{4} l^2 \left[ \sum_{k=1}^n \frac{4^{k-1}}{3^{2k}} \right]$$

$$A_n = \frac{\sqrt{3}}{4} l^2 \left[ 1 + 3 \left( \sum_{k=1}^n \frac{4^{k-1}}{3^{2k}} \right) \right]$$

Luego el área total estaría dado por:

$$A_T = \frac{\sqrt{3}}{4} l^2 \left[ 1 + 3 \left( \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4^{k-1}}{3^{2k}} \right) \right]$$

Lo que nos daría

$$A_T = \frac{\sqrt{3}}{4} l^2 \left[ 1 + 3 \left( \frac{1}{5} \right) \right]$$

Si hacemos uno el lado del triángulo  $l = 1$ , el área que encierra la curva de Kock es

$$A_T = \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{8}{5}\right) \approx 1,3856 \dots$$

Aquí tenemos un resultado importante ya que nos podemos dar cuenta de que el área que encierra el copo de Kock es **finita pero irracional**.

Existen muchas variantes sobre la construcción de la curva de Kock . Abajo mostramos la curva de Koch exterior, que parte originalmente de un hexágono, en vez de un triángulo equilátero:

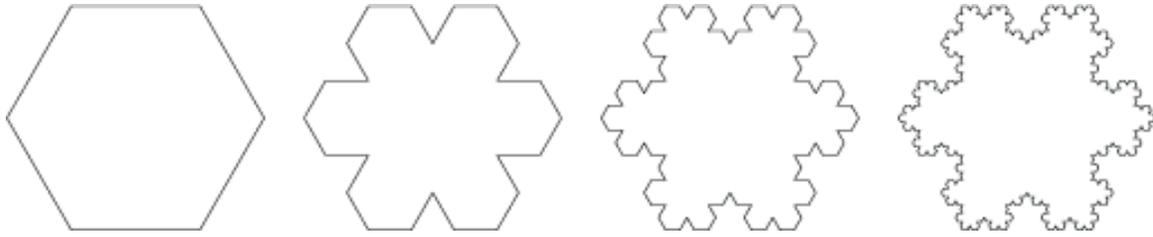


Figura 5.48: Isla de Kock a partir de un Hexágono

En la Grecia clásica existían varias definiciones para el concepto de curva. Desde las curvas entendidas como la intersección de superficies, caso de las cónicas, a la de curva entendida como el lugar geométrico de la trayectoria recorrida por un punto. En el siglo XVII la geometría analítica asocia curvas y ecuaciones algebraicas. Más tarde, el cálculo diferencial acaba reservando el nombre curva a la función continua.

Las curvas con las que tratamos, estamos acostumbrados a verlas suaves, ahora bien, que sucede si trazamos una tangente a una de estas curvas en uno de sus puntos. Ampliemos una zona microscópica alrededor del punto de tangencia: a medida que nos acercamos más y más al punto, la línea tangente se ajusta más y más a la curva. Decimos que localmente la curva es indistinguible de una línea recta. De forma similar ocurre con una superficie: sobre cada punto podemos trazar un plano de tangencia. Decimos, entonces, que localmente la superficie es indistinguible de un plano. La contrapartida algebraica es que podemos determinar analíticamente el valor de la derivada de la curva en el punto de tangencia. Si la curva representa la trayectoria de un móvil, el valor de la derivada en un punto nos proporciona su velocidad instantánea.

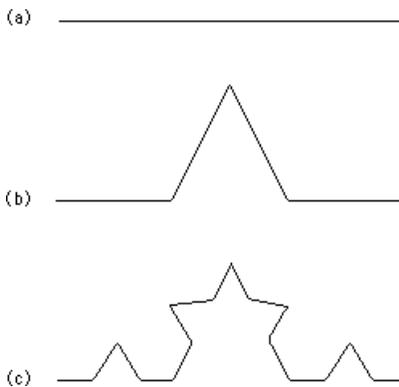


Figura 5.49: Curva de Koch

Observe que la recta (a) es derivable en todos sus puntos. La curva (b) ya no lo es en todos ellos. Una curva quebrada no posee una tangente única en su punto de ruptura. La derivada por la derecha y por la izquierda no coinciden. Esto hace que la descripción de la curva se complique. La curva es continua pero no derivable en ese punto. En la curva (b) nos encontramos con 3 puntos no derivables. La curva (c) es sencillamente la iteración  $n = 3$  de uno de los lados de la curva de Koch. Es continua pero posee 9

puntos no derivables, pero como la iteraciones son infinitas en la curva de Koch resulta ser una curva continua en todos sus puntos pero no derivable en ninguno, es decir, que no podemos trazar tangente a ninguno de sus puntos.

Su dimensión de Hausdorff tiene que estar entre 1, la de una recta, y 2, la del plano. Para el copo de Koch debemos tener en cuenta que el número de segmentos en cada iteración es  $N_n = 4^n$ , y la longitud de cada segmento se reduce en un factor de un tercio cada vez, esto es  $l_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$ . La dimensión fractal será entonces:

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{\log 4^n}{\log 3^{-n}} = \frac{\log 4}{\log 3} \approx 1,26186 \dots$$

### 5.6.3. FRACTAL TRIÁNGULO DE SIERPINSKI

Se trata de un fractal descrito por Waclaw Sierpinski en 1915, que ya había aparecido en el arte italiano en el siglo XIII. Para generar la figura partimos de un triángulo sólido cualquiera, en nuestro caso equilátero. Éste se divide en cuatro triángulos iguales más pequeños, utilizando para ello el punto medio de cada lado como nuevo vértice. Finalmente eliminamos el triángulo que queda en el medio. Este proceso se repite en cada uno de los triángulos restantes<sup>11</sup>.

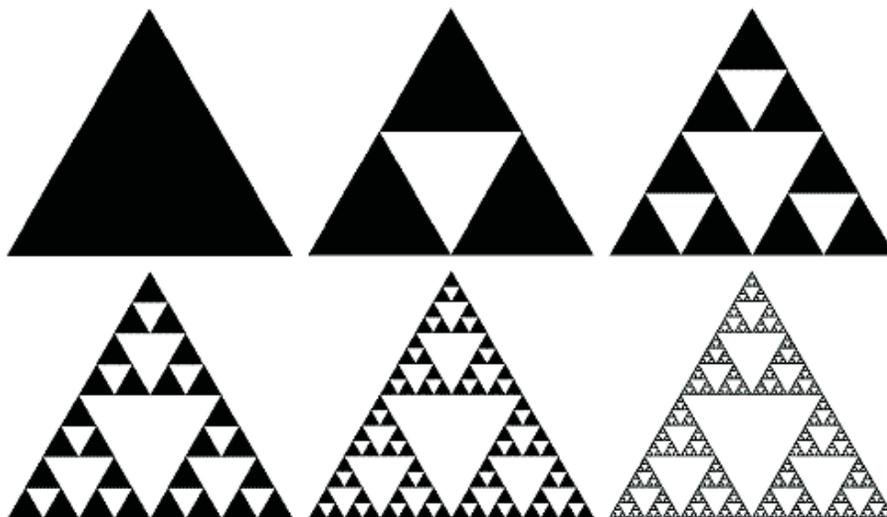


Figura 5.50: Generación del triángulo de Sierpinski.

El triángulo de Sierpinski es el conjunto de puntos que permanecen después de reiterar este proceso infinitas veces.

<sup>11</sup>Tomado del artículo “Longitud y Área de Curvas Fractales” de Pablo Montesdeoca Pérez, enero del 2005

Como cada triángulo genera tres nuevos triángulos, el número de triángulos después de la  $n$ -ésima iteración es  $N_n = 3^n$ . Siendo  $A_0$  el área del triángulo original, en la primera iteración eliminamos  $\frac{1}{4}$  del área de éste, quedando  $A_1 = \frac{3A_0}{4}$ . En la siguiente iteración eliminamos 3 triángulos, cada uno con un área igual a  $\frac{1}{4}$  del área del triángulo del que fue tomado. Por lo tanto, el área total que eliminamos en esta iteración es  $3\frac{1}{4}\frac{A_0}{4} = 3\frac{A_0}{16}$ . Esto implica que en la segunda iteración el área total restante es:

$$A_2 = \frac{3A_0}{4} - \frac{3A_0}{16} = \frac{9A_0}{16} = \left(\frac{3}{4}\right)^2 A_0$$

Si realizamos una iteración más, tendremos igualmente que:

$$A_3 = \frac{9A_0}{16} - 9\frac{1}{4}\frac{1}{16}A_0 = \frac{27A_0}{64} = \left(\frac{3}{4}\right)^3 A_0$$

Generalizando tenemos que

$$A_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n A_0 \text{ para } n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Fácilmente se observa que a medida que  $n$  aumenta hacia infinito, el área tiende a 0.

$$A_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A_0 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$$

Para calcular el perímetro de los triángulos que restan después de cada iteración consideraremos que el perímetro de cada uno de éstos es la mitad que el de la iteración precedente. Esto se desprende directamente del procedimiento de construcción del fractal. Así, siendo  $P_0$  el perímetro original, después de la primera iteración nos quedan 3 triángulos cada uno con un perímetro de valor  $\frac{P_0}{2}$ . En la segunda iteración, tendremos 32 triángulos con perímetros de valor  $\frac{P_1}{2} = \frac{P_0}{4}$ . Para  $n$  iteraciones tendremos:

$$P_n = 3^n \left(\frac{1}{2}\right)^n P_0 = P_0 \left(\frac{3}{2}\right)^n$$

Es inmediato observar que cuando el número de iteraciones  $n$  se aproxima a infinito, el perímetro de los triángulos tiende a infinito.

$$P_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n = P_0 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n = \infty$$

Resulta sorprendente que una curva infinita pueda encerrar un área nula. Se puede concluir que el triángulo de Sierpinski debe tener una dimensión entre 1 y 2. Sabemos

que su dimensión topológica esta en el plano. Usando la formula  $D = \frac{\log N}{\log 2}$ , entonces, si duplicamos la longitud de los lados, se obtiene otro triángulo de Sierpinski semejante al primero, que contiene a su vez a 3 triángulos de la misma escala que el primero; por lo tanto,  $N = 3$ .

$$D = \frac{\log 3}{\log 2} \approx 1,58496\dots$$

# Capítulo 6

## CONCLUSIÓN

En este trabajo de grado se ha puesto de manifiesto la importancia de la aparición del concepto de geometría fractal. Los objetos fractales han dejado de ser una simple curiosidad matemática, como lo fue un par de décadas anteriores, para formar parte de una de las teorías más revolucionarias en las matemáticas del siglo pasado: la Teoría del Caos. Así, la ciencia fractal va a permitir la descripción de prácticamente todos los fenómenos naturales, por muy complejos que sean, ya que éstos suelen poseer algunas de las propiedades fractales. Otra consecuencia importante del desarrollo de la geometría fractal es la reformulación del concepto de dimensión, necesario para obtener valores de magnitud útiles.



# Bibliografía

- [1] MANDELBROT. Benoit, Geometría fractal de la naturaleza, Traducción Josp Llosa. Tusquets Editores Barcelona. Octubre 1997. Título original: The Fractal Geometry of Nature.
- [2] COMAS ROQUETA. J, Dimensión fractal del contorno de una ciudad, Publicación, 2009.
- [3] MONTEALEGRE, Mauro. CARDENAS, Gustavo. LONDOÑO, Gustavo. POLANIA Luis A. Fundamentos de los sistemas dinámicos, Editorial universidad Surcolombiana, 2002.
- [4] FALCONER. Kenneth, Fractal Geometry, Editorial John Wiley y Sons,1990.
- [5] DERLINCHAN GONZALEZ. Daniel, Generación Gráfica de Fractales, Publicación, 2004.
- [6] POLANIA GUTIERREZ. Leidy,RODRIGUEZ RODRIGUEZ. Lorena, Trabajo de grado Ideas básicas de la geometría fractal, Universidad Surcolombiana, 2002.
- [7] DUSSAN PASCUAS. Jorge, Trabajo para la curso de Innovación pedagógica, Fractales, una belleza infinita, 2006.
- [8] BRAÑA. Juan Pablo, Introducción a la Geometría Fractal, 1996.
- [9] Fractaltec, <http://www.fractaltec.org>
- [10] Área Fractal, <http://www.arrakis.es/sysifus/>
- [11] Geometría Fractal, <http://coco.ccu.uniovi.es/geofractal/>
- [12] Wikipedia enciclopedia libre, <http://es.wikipedia.org/>
- [13] Geometría fractal, [www.geometriafractal.com/](http://www.geometriafractal.com/)
- [14] Pagina del periodista Eduard Punset, [www.eduardpunset.es/](http://www.eduardpunset.es/)
- [15] Fractales, <http://fractales.org/la-geometria-fractal-de-la-naturaleza/>
- [16] Pagina de [www.afinidadelectrica.com.ar](http://www.afinidadelectrica.com.ar).